BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grieser, Johann Georg

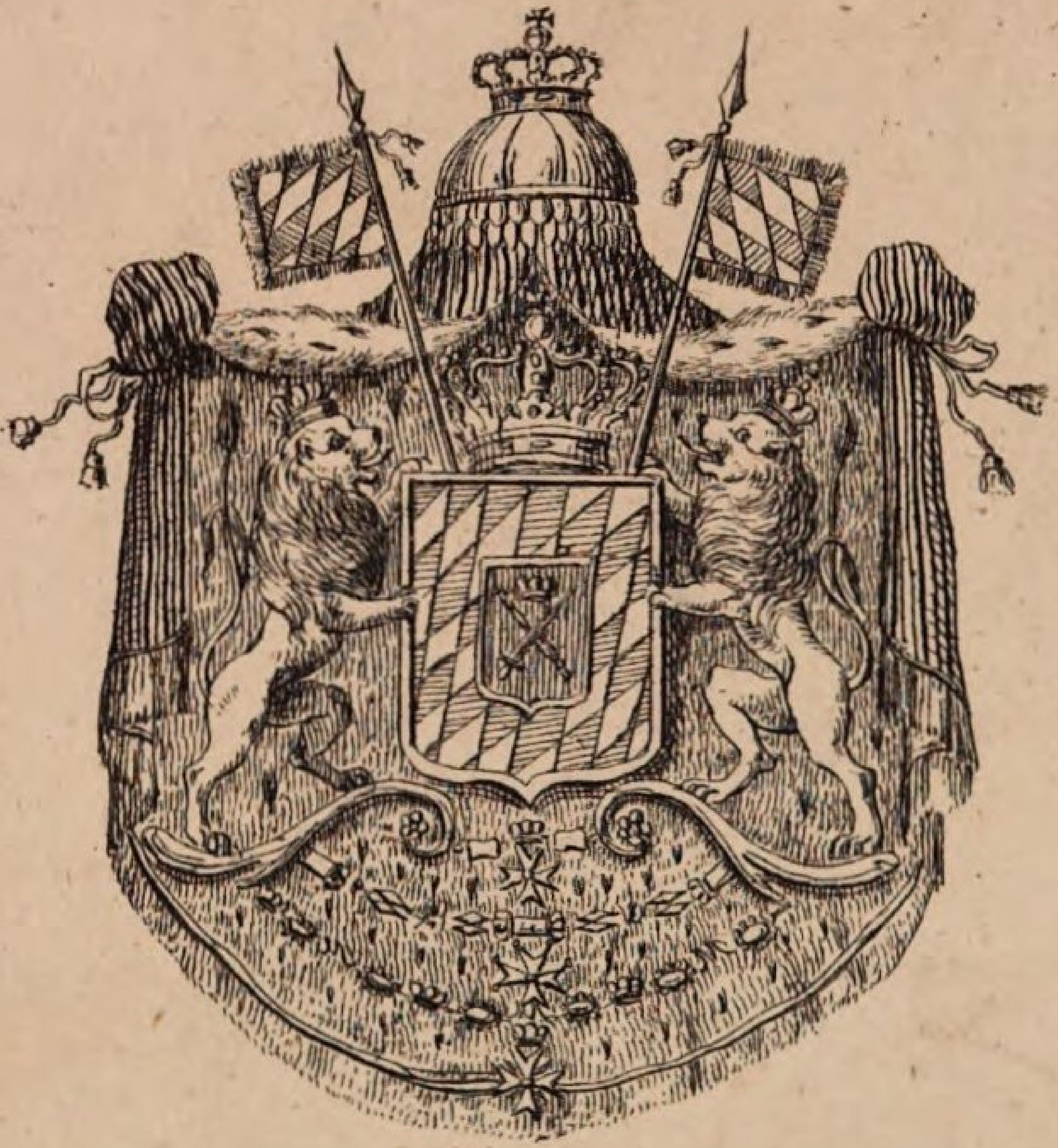
Elementare Geometrie und ebene Trigonometrie für Schulen unnd zum SelbstUnterrichte

Kempten 1823

Math.p. 187 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081855-7

Math. P.
187 m

Math. P.
187m



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

Elementar-Geometrie
und
ebene Trigonometrie.

Für
Schulen und zum Selbst-Unterrichte.

Von

Georg Grieser,
Professor der Mathematik am königl. baier. Gymnasium
zu Neuburg an d. D.

Mit 5 Figuren-Tafeln.

Kempten, 1823.
Druck und Verlag von T. Dannheimer.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

In summo apud Graecos honore Geometria fuit.

Cicero Tusc. Quaest. I, 2.

An den Buchbinder.

Damit die Figuren, welche am Ende angebunden sein müßen, ganz gesehen und bequem gebraucht werden können, so muß das leere Blatt jedesmal noch etwa einen Zoll ausser dem Buche sein.

Vorwort.

Zur Entschuldigung der Herausgabe dieser neuen Elementar-Geometrie und ebenen Trigonometrie bei so vielen vorhandenen guten Lehrbüchern dieser Art glaube ich anführen zu müßen, daß ich in meinem Buche, wo ich nicht neue Beweise machte, viele der bestehenden kürzer und leichter zu geben trachtete, da ich der Ueberzeugung lebe, Weitschweifigkeit tauge hierin nichts, indem dieselbe den unfähigen Geistern nichts hilft, und den feinen beschwerlich fällt.

Kann ich mir wahrhaft etwas bezeugen, so ist es dieses: Bei den vielen reinen Quellen *),

*) Vega, Magold, Bundschue, Develey, Matthias, Beck, Wolfgang, Müller u. a.

die ich benützte, habe ich immer selbst nach Kräften reiflich nachgedacht, und etwa eingeschlichene Fehler kommen lediglich auf meine Rechnung, es müßten nur Druckfehler sein, welche ich wegen weiter Entfernung vom Druckorte nur einmal besserte! — — —

Nimm denn, werther Leser, das Büchlein hin, und, gefällt es, lies und lerne; du findest darin die Sätze der ältesten und einer herrlichen Wissenschaft, des Schweißes der Edlen werth!

Neuburg an d. D., im April 1823.

Grieser, Professor.

Geometrie.

I. Abschnitt.

Vorläufige Erklärungen und Grundsätze.

§. 1.

Erklärung:

Die Geometrie ist die Wissenschaft stetiger ausgedehnter Größen.

Anmerkung: 1) Stetige Größen sind solche, deren Theile so zusammenhängen, daß beim Aufhören des einen Theiles der Anfang des andern gesetzt ist. Ausgedehnte Größen sind jene, deren Theile außerhalb einander sind.

2) Außer der Zeit und dem Raume gibt es keine stetige ausgedehnte reine Größe. Die Ausdehnung der Zeit läßt sich räumlich durch eine gerade Linie darstellen; folglich kann man die Geometrie auch die Wissenschaft des Raumes nennen.

§. 2.

Erklärung:

Ein geometrischer Körper (solidum) ist ein allenthalben begrenzter Raum; eine geometrische Fläche (planities) ist die Ausdehnung des Körpers an der Grenze; eine geometrische Linie ist die Ausdehnung der Fläche an den Grenzen; ein geometrischer Punct ist die Grenze (das Aufhören) der Linie.

Anmerkung: 1) Kein Körper besteht aus Flächen, keine Fläche aus Linien, keine Linie aus Puncten; denn

die Grenzen sind nur das Aeußerste, wo etwas aufhört, woraus nichts besteht.

2) Geometrische Puncte als Grenzen der Linie sind ohne Ausdehnung, — untheilbar.

3) Geometrische Körper, Flächen, Linien und Puncte existieren nur im Vorstellungsvermögen, und jede Zeichnung ist nur ein Bild ihrer reinen Verstandesanschauung.

§. 3.

Erklärung:

Der Körper ist nach Länge, Breite und Tiefe, die Fläche nach Länge und Breite, die Linie nach Länge ausgedehnt. Dieses sind die 3 Dimensionen des Körpers, die 2 Dimensionen der Fläche und die eine der Linie. Der Punct hat keine Dimension.

Anmerkung: Die Lehre von den Linien heißt Longimetrie, die Lehre von den Flächen Planimetrie, die Lehre von den Körpern Stereometrie.

§. 4.

Erklärung:

»Was eine gerade Linie sei, ist bekannt«, sagte Hr. v. Segner in seiner Geometrie; auch Hr. Hofrath Kästner bemerkte, daß Niemand eine gerade Linie aus einer Bestimmung (Definition) kennen lernen werde. Eine krumme Linie ist jene, die nicht gerade ist.

Anmerkung: Hr. geistlicher Rath Magold bestimmte die gerade Linie als solche, deren alle Theile einerlei Richtung haben.

§. 5.

Erklärung:

Eine Ebene, ebene Fläche (planum) ist jene, in der man von jedem Puncte zum andern solche gerade Linien ziehen kann, daß dieselben ganz in der Fläche liegen. Eine krumme Fläche ist jene, die keine ebene ist.

§. 6.

Erklärung.

a) Ein ebener geradliniger Winkel, kurz: ein Winkel (angulus) ist die Neigung zweier geraden Linien in einem Puncte; man heißt die zwei Linien Schenkel (crura), den Punct Scheitel (vertex); z. B. in Fig. 1. ist C der Scheitel, AC, BC sind die Schenkel des Winkels ACB oder BCA oder x.

b) Wenn die Schenkel AC, BC (Fig. 2.) eine solche Lage haben, daß sie eine gerade Linie AB bilden, so heißt der Winkel ACB oder BCA ein gerader.

c) Nebenwinkel x, y (anguli contigui, deinceps positi) sind solche, welche einen Schenkel CD (Fig. 2.) gemein haben, und wo CB und CA eine gerade Linie bilden.

α) Sind die beiden Nebenwinkel ungleich, so ist jeder ein schiefer (obliquus),

β) sind sie gleich, so heißt (Fig. 3.) jeder ein rechter (rectus).

γ) Der gemeinschaftliche Schenkel CD (Fig. 3.) bei gleichen Nebenwinkeln, welcher nach CA, CB gleiche Neigung hat, heißt senkrecht, lothrecht, perpendiculär (perpendicularis). Diese Bestimmung schließt jede andere Linie Cd als mitperpendiculär aus.

d) Ein Winkel ACD (Fig. 4.), welcher größer ist, als ein gerader, heißt erhaben (convexus); ein Winkel ABD, der kleiner ist, als ein gerader, wird hohl (cóncavus) genannt.

e) Der hohle Winkel ist stumpf (obtusus), wenn er größer, spitzig (acutus), wenn er kleiner, als ein rechter ist; z. B. in Fig. 2. ist y stumpf, x spitzig.

Anmerkung: Unter Winkel oder Beisatz versteht man den hohlen.

§. 7.

Erklärung:

Die Größe eines Winkels hängt von der Neigung, nicht von der Länge der Schenkel ab.

§. 8.

Erklärung:

Scheitelwinkel (anguli verticales) y, x oder u, z (Fig. 5.) sind solche, deren entgegengesetzter Scheitel C zusammenfällt, und wobei die zwei geraden Linien EC, AC die verlängerten von CD, CB sind.

§. 9.

Erklärung:

Zwei in einer Ebene gezogene gerade Linien AB, CD (Fig. 6.), die, auf beiden Seiten wie weit immer verlängert, einander nie berühren, heißen gleichlaufend, parallel; AB ⧣ CD.

§. 10.

Erklärung:

Eine mit Linien begrenzte Fläche heißt Figur. Je nachdem die begrenzenden Linien gerade oder krumm sind, so sind die Figuren gerad- oder krummlinig; z. B. Fig. 9, 7. Bei geradlinigen Figuren heißt jede Linie Seite, z. B. AC (Fig. 9.); die geraden Linien, welche zusammen die Figur begrenzen, heißen Umfang (perimeter). Wenn man (Fig. 9.) innerhalb einer geradlinigen Figur von einem Scheitel zum gegenüberstehenden eine gerade Linie CB zieht, so heißt sie Diagonale.

§. 11.

Erklärung:

Eine Kreislinie (circulus) ist eine krumme, in sich selbst zurückkehrende Linie, deren jeder Punct

von einem innerhalb liegenden Puncte C (Fig. 7.) gleichweit absteht. Diese krumme Linie heißt Umkreis, Peripherie (circumferentia), der innerhalb liegende Punct C Mittelpunct (centrum). Die sich gleichen Linien EC, CF, CD, CG, deren jede die Hälfte der durch das Centrum bis an die Peripherie gehenden geraden und Durchmesser (diameter) genannte Linie ED ist, nennt man Halbmesser (semidiameter, radius). Eine von einem zum andern Puncte der Peripherie gezogene gerade Linie heißt Sehne (chorda). Jeder Theil EF der Peripherie heißt Bogen (arcus). Ein von zwei Radien CG, CD und ihrem Bogen GHD eingeschlossenes Stück wird Ausschnitt (sector), und das von der Sehne GD und ihrem Bogen GHD eingeschlossene Stück Abschnitt (segmentum) genannt.

Anmerkung: 1) Kreislinien macht man mit dem Cirkel (circinus).

2) Der Durchmesser ist die größte Sehne, welche die Kreislinie und Kreisfläche (den Kreis) in 2 gleiche Theile theilt.

3) Außer der Kreislinie gibt es noch viele andere krumme Linien (Curven), deren Abhandlung jedoch nicht hieher gehört.

§. 12.

Erklärung:

Man theilt die Peripherie des Kreises in 360 gleiche Theile, weil sich diese Zahl ohne Rest mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 theilen läßt. Einen solchen 360sten Theil nennt man Grad. Den Grad theilt man in 60 gleiche Theile, jeden Minute genannt. Die Minute theilt man auch in 60 gleiche Theile, und heißt jeden Sekunde. Der 60ste Theil der Secunde heißt Terze. Sechs Grade, 27 Minuten, 24 Secunden, 15 Terzen schreibt man kurz so an: $6^{\circ}, 27', 24'', 15'''$.

§. 13.

Erklärung:

Wenn man (Fig. 7.) auf den Durchmesser ED einen andern Durchmesser FG so gesetzet annimmt, daß der Winkel ECF = FCD, ECG = DCG wird, daß somit gleiche Nebenwinkel oder 4 rechte Winkel entstehen, so wird die Peripherie offenbar in 4 gleiche Theile, jeder zu 90°, getheilt. Also hat ein rechter Winkel 90°, oder R = 90°. Der rechte Winkel ist das Maß der hohlen; jedes Winkels Maß ist auch der von dessen Schenkeln eingeschlossene Kreisbogen. Da jeder Kreis, er mag klein oder groß sein, in 360° eingetheilt wird, so ist (Fig. 7.) der Bogen ef nicht minder, als der Bogen EF das Maß des Winkels ECF, indem die Größe der Winkel nicht von der Länge der Schenkel, sondern von ihrer Neigung abhanget, und die Zahl der Grade von ef so groß ist, als jene von EF.

§. 14.

Zusatz:

Alle Winkel um einen Punct C (Fig. 7.) haben 360°; alle Nebenwinkel aus C oberhalb oder unterhalb ED haben 180°, da die ganze und halbe Kreislinie das Maß ist.

§. 15.

Erklärung:

Eine geradlinige von drei Seiten begrenzte Figur heißt Dreieck (triangulum, trigónum), z. B. △ ABC (Fig. 8.). Eine geradlinige von 4 Seiten begrenzte Figur heißt Viereck (Fig. 9.); dann kommen die Fünfecke, Sechsecke (Fig. 10.), Siebenecke, Vielecke (pentagonum, hexagonum, heptagonum, polygonum)

§. 16.

Erklärung:

Ein Dreieck ist gleichseitig (aequilaterum),

wenn die drei Seiten von einerlei Größe sind; z. B. △ ABC (Fig. 8.); gleichschenklig (aequicrurum, isosceles), wenn zwei Seiten gleiche Länge haben (Fig. 11.); ungleichseitig (scalenum), wenn (Fig. 12.) keine Seite der andern gleich ist.

§. 17.

Zusatz:

Alle gleichseitigen Dreiecke sind gleichschenklig, aber nicht umgekehrt.

§. 18.

Erklärung:

Ist (Fig. 11.) AC die Grundlinie (basis), so ist B Spitze des Dreiecks (△).

§. 19.

Erklärung:

Ein Dreieck ist rechtwinklig (rectangulum, orthogonium), wenn es einen rechten Winkel C hat (Fig. 13.); stumpfwinklig (obtusangulum, amblygonium), wenn es einen stumpfen Winkel A hat (Fig. 14.); spitzwinklig (acutangulum, oxygonium), das lauter spitzige Winkel hat (Fig. 8, 11.). Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite Hypotenuse, und die zwei andern Seiten heißen Katheten.

§. 20.

Erklärung:

Ein Viereck, dessen vier parallele Seiten alle gleich sind, und das 4 rechte Winkel hat, heißt Quadrat (quadratum), z. B. Fig. 15.; ein Viereck von ungleichen Seiten, dessen zwei gegenüberstehende parallele Seiten aber gleich sind, und das auch 4 rechte Winkel hat, heißt Rechteck (rectangulum), z. B. Fig. 16.; ein Viereck, das vier gleiche parallele Sei=

ten und einen schiefen Winkel D hat, ist eine Raute (Rhombus), z. B. Fig. 17.; ein Viereck von ungleichen Seiten, dessen zwei gegenüberstehende parallele Seiten aber gleich sind, und das einen schiefen Winkel D hat, heißt länglichte Raute (Rhomboides), z. B. Fig. 18.; ein Viereck, wo nur zwei Seiten parallel sind, heißt Trapez (trapeza), z. B. Fig. 19.; endlich ein Viereck, wo keine zwei Seiten parallel sind, wird Trapezoid genannt, z. B. Fig. 20. Quadrate, Rechtecke, Rauten und Rhomboide haben den gemeinsamen Namen Parallelogramme.

§. 21.

Erklärung:

Ein Vieleck von lauter gleichen Seiten und Winkeln heißt regelmäßig (regulare), z. B. Fig. 60., im Gegentheile unregelmäßig (irregulare), z. B. Fig. 21.

§. 22.

Erklärung:

a) Von einem zum andern Puncte gibt es nur eine gerade Linie, welche die kürzeste ist. Durch zwei Puncte ist die Lage, und durch 2 Endspuncte die Größe einer geraden Linie bestimmt. Eine zu einem Maße angenommene gerade Linie von bestimmter Länge heißt man Schuh ('), dessen zehnten gleichen Theil Zoll ("), des Zolles zehnten gleichen Theil nennt man Linie ('''); 10 Schuh sind eine Ruthe (°).

b) Zwei gerade Linien schneiden einander nur in einem beiden gemeinsamen Puncte, und schließen keinen Raum ein (Fig. 5.).

c) Eine gerade Linie kann den Kreis höchstens in 2 Puncten schneiden.

d) Zwei Kreislinien können sich nur in 2 Puncten m, n (Fig. 7.) schneiden.

Zusatz: In jedem Dreiecke (Fig. 14.) sind zwei Seiten BA + AC größer, als die dritte BC; denn

wäre BA + AC = BC, so fielen die zwei Seiten auf die Grundlinie, und es würde kein Raum eingeschlossen; oder wären BA + AC kleiner als BC, so wären sie Theile von BC; es würde wieder kein Raum eingeschlossen, und es wäre kein Dreieck vorhanden.

§. 23.

Erklärung:

Haben zwei Figuren gleiche Quantität und Qualität, so decken sie sich, congruiren (≅); haben sie gleiche Quantität, so sind sie gleich; haben sie gleiche Qualität, so sind sie ähnlich (∽). Die Aehnlichkeit erfordert a) eine gleiche Zahl der Seiten, b) Gleichheit der Winkel in einerlei Ordnung, c) Proportion der (homologen) Seiten, welche gleiche Winkel einschließen oder diesen entgegenstehen.

I. Zusatz: Alle congruenten Figuren sind gleich, aber nicht alle gleiche Figuren sind congruent; denn alle congruente Figuren haben gleiche Quantität, allein nicht alle gleiche Figuren sind ähnlich. Z. B. Zwei congruente Dreiecke sind gleich groß; jedoch ein Dreieck, das mit einem Vierecke gleiche Größe hat, ist diesem nicht ähnlich.

II. Zusatz: Alle geraden Linien sind ähnlich; sind sie gleich, so decken sie einander.

III. Zusatz: Winkel sind congruent, wenn Scheitel auf Scheitel, und Schenkel auf Schenkel fällt.

IV. Zusatz: Alle Kreislinien sind ähnlich (Fig. 7.); sind sie nun von gleichen Radien beschrieben, also gleich, so decken sie einander.

Anmerkung: Diese Sätze (§. 23.) heißt man die Grundsätze (principia) der Congruenz.

II. Abschnitt.

Von Linien, Winkeln und Figuren in Ansehung der Gleichheit.

---

§. 24.

Lehrsatz:

Wenn (Fig. 22.) in den Dreiecken ABC, abc der Winkel A = a, und die einschließenden Seiten AB, ab, AC, ac gleich sind, so sind die Dreiecke congruent, d. h. wenn

$$\frac{\begin{array}{c} A = a \\ AB = ab \\ AC = ac \end{array}}{\text{so } \triangle ABC \cong \triangle abc.}$$

Beweis:

Man lege das Dreieck abc auf das Dreieck ABC, so daß a auf A und ac über AC zu liegen kommt. Weil ac = AC, so fallt c auf C. Indem ferner der Winkel a = A, so kommt ab über AB, und weil ab = AB ist, fallt b auf B. Da nun die Puncte B, C, b, c auf einerlei Art bestimmt sind, so ist bc = BC (§. 22. a), und diese Linien decken sich.

I. Zusatz: BC = bc, B = b, C = c.

II. Zusatz: Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen ein Dreieck.

§. 25.

Lehrsatz:

Wenn (Fig. 22.) $$\frac{\begin{array}{c} AC = ac \\ A = a \\ C = c \end{array}}{\text{so ist } \triangle ACB \cong \triangle acb, \text{ d. h.}}$$

wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die zwei anliegenden Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Beweis:

Man lege AC auf ac, so fallen, weil AC = ac, die Puncte A, a, C, c auf einander. Indem der Winkel A = a und C = c, so fallen AB, ab, CB, cb über einander, und bestimmen auf einerlei Weise die Puncte B, b, welche sich decken.

I. Zusatz: AB = ab, CB = cb, B = b (§. 24.).

II. Zusatz: Eine Seite mit zwei anliegenden Winkeln bestimmt ein Dreieck.

§. 26.

Lehrsatz:

Wenn in zwei Dreiecken (Fig. 23.) alle Seiten einander gleich sind, so sind die Dreiecke congruent; d. h. wenn AB = ab
AC = ac
BC = bc

so $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc.

Beweis:

Man beschreibe aus A mit AB den Bogen pq, und aus C mit CB den Bogen mn. Da ac = AC, so decken die Linien einander (§. 23. II. Zus.), und a fällt auf A, c auf C. Man trage ab aus A in einen Punct des Bogen pq, worin nun b zu liegen kommt; auch trage man bc aus C in einen Punct des Bogen mn, worin b wieder zu liegen kommt. Da nun b in mn und pq liegt, so muß dieses B sein; folglich kommt a auf A, c auf C, und b auf B, und die Dreiecke decken sich.

I. Zusatz: A = a, B = b, C = c.

II. Zusatz: Durch alle Seiten ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

§. 27.

Lehrsatz:

Im Dreiecke stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, d. h. (Fig. 22.) wenn

AB = BC, so C = A.

Beweis:

Man lege die Dreiecke ACB, acb so auf einander, daß ba auf BC, der Punct a auf C falle. Wenn der Winkel b = B, ab = BC, bc = AB ist, so fällt der Punct c auf A, und die Dreiecke decken sich (§. 24.). Da a = C und a = A, so ist C = A.

I. Zusatz: Im gleichschenkligen Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich.

II. Zusatz: Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich, und dasselbe ist eine regelmäßige Figur (§. 21.).

§. 28.

Lehrsatz:

Im Dreiecke stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber, d. h. (Fig. 22.) wenn

A = C, so BC = AB.

Beweis:

Man lege △ acb so auf △ ACB, daß der Punct a auf C, und AC unter ac falle. Wenn ac = AC, der Winkel A = c, und der Winkel C = a, so decken sich die Dreiecke (§. 25.). Da nun ab = BC und ab = AB, so ist BC = AB.

I. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so ist es gleichschenklig.

II. Zusatz: Wenn in einem Dreiecke alle Winkel gleich sind, so ist es gleichseitig und eine regelmäßige Figur (§. 21.).

§. 29.

Aufgabe: Ueber einer gegebenen Linie AC (Fig. 24.) ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Auflösung:

Man setze eine Zirkelspitze in A ein, und beschreibe mit AC den Bogen oa; dann eben so aus C mit AC den Bogen bc; der Durchschnittspunct bestimmt den Punct B, wohin man die Linien AB, CB ziehe.

Beweis:

Man machte AC = AB, und AC = BC, also ist AB = BC.

§. 30.

Aufgabe: Aus 3 gegebenen Seiten, deren 2 zusammen größer, als die dritte sind, (§. 22. Zus.) ein Dreieck zu beschreiben (Fig. 25, 26.).

Auflösung:

Die gegebenen Seiten seien a, b, c. Man nehme c als Grundlinie, steche mit dem Cirkel a ab, und mache am linken Endspuncte von c den Bogen rs; dann steche man b ab, und mache am rechten Endspuncte von c den Bogen tu; der Durchschnittspunct schließt oben das Dreieck.

Zusatz: Ist a = b, so wird das Dreieck (Fig. 25.) gleichschenklig.

Anmerkung: Die Linie c heißt man Centrallinie, weil sie 2 Centra verbindet; a, b sind Radien (Fig. 26.). Sieh §. 22. Zus.

§. 31.

Aufgabe: An den gegebenen Punct C der Linie AB den gegebenen Winkel x (Fig. 27.) zu verzeichnen.

Auflösung:

Man mache aus C des gegebenen Winkels x mit Cb den Bogen ab, und mit derselben Cirkelöffnung aus C der gegebenen Linie AB den Bogen ab. Nun messe man mit dem Cirkel die Seite (Länge) ba, welche x gegenübersteht. Mit dieser Länge mache man bei b der Linie AB den Bogen mn; der Durchschnittspunct, an den man von C der Linie AB eine gerade Linie zieht, bestimmt den neuen Winkel x = x.

Beweis:

Ca = Ca, Cb = Cb, ba = ba vermöge der Construction; also △ Cab ≌ △ Cab (§. 26.), und x = x (§. 27.).

Anmerkung: Mündlich wird vom Transporteur gehandelt.

§. 32.

Aufgabe: Aus zwei gegebenen Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen gegebenen Winkel x (Fig. 28.) ein Dreieck zu machen.

Auflösung:

Man trage a, b über den Schenkeln von x nach ihrer Länge auf, und ziehe von deren Endspuncten die treffende x gegenüberstehende Seite.

§. 33.

Aufgabe: Aus zwei gegebenen ungleichen Seiten AD, CD und einem Winkel x, welcher der größern Seite AD entgegen steht (Fig. 29.), ein Dreieck zu machen.

Auflösung:

Man lege über den Schenkel CN von x die kleinere Seite CD nach ihrer Länge; mit dem Cirkel nehme man die größere Seite AD, und beschreibe

mit derselben aus D einen Bogen yz; wo dieser den andern Schenkel CM schneidet, wird das Dreieck geschlossen.

§. 34.

Aufgabe: Aus zwei gegebenen ungleichen Seiten AD, CD = DH und einem Winkel y, welcher der kleinern Seite CD = DH gegenübersteht (Fig. 30.), zwei Dreiecke zu machen.

Auflösung:

Ueber den Schenkel AM von y lege man nach ihrer Länge die Seite AD; mit einer der kleinern Seite CD gleichen Cirkelöffnung mache man aus D den Bogen HC; wo derselbe den verlängerten Schenkel AN zweimal schneidet, ziehe man nach D die Linien HD, CD, und △ ADC, △ ADH sind die verlangten.

Zusatz: Aus den §§. 33, 34. ersieht man, daß ein Dreieck nur vollkommen bestimmt ist aus zwei Seiten und dem der größern Seite entgegenstehenden Winkel. Also ist ein rechtwinkliges Dreieck vollkommen aus der Hypotenuse und einem Katheten bestimmt.

§. 35.

Aufgabe (Fig. 31.): Aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln x, y ein Dreieck zu machen.

Auflösung:

Man verlängere die Schenkel der an B, C gesetzten Winkel; in D, wo sie sich scheiden, schließt sich das Dreieck.

§. 36.

Aufgabe: Einen gegebenen Winkel in 2 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

Man setze eine Spitze des Cirkels in A ein (Fig. 32.), und mache mit beliebiger Oeffnung den Bogen ch. Dann setze man nach einander die Cirkelspitze in c, h ein, und mache mit beliebiger, aber gleicher Oeffnung die sich in n schneidenden Bögen ri, so. Endlich ziehe man von A nach n die Linie An.

Beweis:

An = An,
Ac = Ah, wegen der Construction;
cn = hn,

△ Anc ≅ △ Anh (§. 26.).

Weil cn = hn, ist u = v (§. 27.)

Zusatz: Durch fortgesetztes Halbieren läßt sich der Winkel A in 4, 8, 16, 32 ꝛc. Theile theilen.

§. 37.

Aufgabe: Eine gegebene Linie in 2 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

Man setze (Fig. 33.) in A die Cirkelspitze ein, und mache mit einer die Hälfte der Linie dem Anscheine nach übersteigenden Oeffnung des Cirkels die Bögen oh, cm ober- und unterhalb der Linie; sodann mit eben derselben Oeffnung aus B die Bögen qp, ar. Wenn man nun die Puncte nt verbindet, so ist in H die Hälfte der Linie.

Beweis:

An = Bn, }
At = Bt, } wegen der Construction;
nt = nt, }

△ ntA ≅ △ ntB (§. 26.),

also ist der Winkel Ant = Bnt (§. 27.), ferner:

An

$$\begin{array}{l} An = Bn \\ nH = nH \\ AnH = BnH \ (\S.\ 7.) \\ \hline \triangle HnA \cong \triangle HnB \ (\S.\ 24.); \end{array}$$

folglich $AH = HB$ (§. 28.)

Zusatz: Die Linie nH ist ein Perpendikel aus n auf AB.

Beweis:

$$\begin{array}{l} An = Bn \\ At = Bt \\ nt = nt \\ \hline \end{array}$$

$\triangle Ant \cong Bnt$; daher der Winkel $Ant = Bnt$;

$$\begin{array}{l} An = Bn \\ AnH = BnH \\ nH = nH \\ \hline \end{array}$$

$\triangle AnH \cong \triangle BnH$, daher (weil $An = Bn$) $y = z$ (§. 27.), und nH senkrecht (§. 6. γ).

§. 38.

Aufgabe (Fig. 34.): Aus dem Puncte C der geraden Linie AB einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung:

Man setze die Cirkelspitze in C ein, und schneide auf AB mit gleicher Oeffnung des Cirkels die Puncte m, n ab. Nun beschreibe man mit einer Cirkel-Oeffnung, welche jedoch größer, als mC ist, aus m und n oberhalb die Bögen tu, kl, und ziehe oC.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} mC = nC \\ mo = no \\ oC = oC \end{array}\right\} \text{wegen der Construction.}$$

$\triangle mCo \cong \triangle nCo$, folglich (weil $mo = no$) ist $y = z$, und oC ist senkrecht.

Anmerkung: Um an jeden Punct von AB einen Perpendikel schnell zu machen, dient (wie mündlich zu zeigen ist) ein **hölzernes rechtwinkliges Dreieck.**

§. 39.

Aufgabe: Von einem außerhalb der Linie AB gelegenen Puncte C auf dieselben einen Perpendikel zu ziehen.

Auflösung:

Aus C (Fig. 35.) schneide man mit einer Cirkel-Oeffnung Cq von AB die Puncte m, n ab. Mit einer Cirkelöffnung mC = nC beschreibe man aus m und n oben und unten Bögen, welche in C, l sich schneiden. Wenn man nun Cl verbindet, so ist CD der verlangte Perpendikel (§. 37. Zus.).

§. 40.

Lehrsatz:

Die zwei Nebenwinkel y, x (Fig. 2.) haben zusammen 180° oder 2R (zwei rechte Winkel).

Beweis:

Alle Nebenwinkel aus C oberhalb einer geraden Linie AB betragen 180° (§. 14.).

Zusatz: Ist einer von den zwei Nebenwinkeln bekannt, so weiß man auch die Größe des andern; denn wäre (Fig. 2.) z. B. y = 120°, so würde x = 180° — y = 180° — 120° = 60° sein. Den Winkel, welcher mit einem andern 180° gibt (z. B. 120°, 60°) heißt man **Supplementswinkel.**

§. 41.

Lehrsatz:

Scheitelwinkel (§. 8.) sind gleich groß, d. h., y = x, u = z (Fig. 5.).

Beweis:

a)
$$\begin{aligned} y + z &= 180^\circ \\ x + z &= 180^\circ \\ \hline y - x &= 0, \text{ und } y = x. \end{aligned} \Big\}\ §.\ 40.$$

b)
$$\begin{aligned} z + x &= 180^\circ \\ u + x &= 180^\circ \\ \hline z - u &= 0, \text{ und } z = u. \end{aligned} \Big\}\ §.\ 40.$$

§. 42.

Lehrsatz (Fig. 35.):

Wenn man in einem Dreiecke DCn eine Seite Dn verlängert, so ist der äußere Winkel CnB größer, als der innere C, welcher der verlängerten Seite Dn entgegensteht.

Beweis:

Man mache Ce = en, DE = EL, so ist, weil auch E = e (§. 41.) das △ CDE ≅ △ nLe (§. 24.); ferner ist t < CnB; aber t = C (§. 27.), folglich C < CnB.

Zusatz: Im Dreicke ist der äußere Winkel größer, als jeder von den beiden innern entgegengesetzten, wovon nämlich keiner sein Nebenwinkel ist. Denn:
CnB > C (Lehrsatz); wenn man Cn verlängert, ist GnD > nDC (Lehrsatz). Nun ist CnB = GnD (§. 41.), daher
CnB > nDC.

§. 43.

Lehrsatz (Fig. 35.):

Zwei Winkel eines Dreieckes halten weniger, als 180°, oder: C + CnD < 180°.

Beweis:

$$\begin{array}{l} CnD = CnD \\ C < CnB \text{ (§. 42.)} \\ \hline CnD + C < CnD + CnB, \text{ welche letztere (§.40.)} = 180^\circ. \end{array}$$

§. 44.

Lehrsatz (Fig. 36.):

Wenn zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten NM so geschnitten werden, daß a) die Summe der zwei innern Winkel $= p + q$ zwei rechte Winkel oder 180° macht, oder b) daß der äußere Winkel o seinem innern entgegengesetzten p gleich ist, oder c) daß die Wechselwinkel gleich sind, nämlich $r = p$, $s = q$, so sind die Linien AB, CD parallel.

Beweis:

a)
$$\left.\begin{array}{l} r + q = 180^\circ \\ s + p = 180^\circ \end{array}\right\} \text{§. 40.}$$

$$\begin{array}{l} r + q + s + p = 360^\circ; \text{ nach der Bedingung} \\ \pm q \quad \pm \quad p = \quad 180^\circ, \text{ daher} \\ \hline r \quad + \quad s \quad = 180^\circ. \end{array}$$

Da nun nach der Annahme von $p + q = 180^\circ$ auch auf der andern Seite $s + r = 180^\circ$, so wollen wir setzen, daß bei der Annahme von $p + q = 180^\circ$, oder daß bei $s + r = 180^\circ$ die Linie AB jene von CD schneide, mithin diese Linien nicht parallel seien. Allein da entstände ein Dreieck, dessen zwei innere Winkel gegen §. 43. die Zahl von 180° hätten.

b)
$$\begin{array}{l} o = p \text{ (nach der Bedingung)}, \\ o + q = 180^\circ \text{ (§. 40.), also} \\ \hline p + q = 180^\circ, \text{ folglich AB \# CD (lit.a.).} \end{array}$$

c) $r = p$ (nach der Bedingung), und $s = q$,
$\underline{r + q = 180^\circ}$ (§. 40.), und $\underline{s + p = 180^\circ}$, also
$p + q = 180^\circ$, wie auch $q + p = 180^\circ$, folglich $AB \# CD$ (lit. a.).

Zusatz: Wenn zwei innere Winkel $t + s < 180^\circ$ sind (Fig. 37.), so schneidet OP die Linie CD.

§. 45.

Lehrsatz (Fig. 36.):

Wenn zwei Linien AB, CD parallel sind, so halten a) die innern Winkel $q + p$ die Zahl von 180°, b) es ist $o = p$, c) auch ist $r = p$, $s = q$.

Beweis:

a)
$$\left.\begin{array}{l} r + q = 180^\circ \\ s + p = 180^\circ \end{array}\right\} \text{§. 40.}$$
, also

$$\begin{array}{l} r + q + s + p = 360^\circ. \text{ Nun sei} \\ \quad \pm q \pm p \gtrless \pm 180^\circ \\ \hline r + s \lessgtr 180^\circ. \end{array}$$

Mithin würden die zwei Linien auf der einen oder andern Seite sich schneiden, und sie wären bei der Annahme von $q + p \gtrless 180^\circ$ gegen die Voraussetzung nicht parallel, weßhalb $q + p = 180^\circ$ sein muß.

b) $q + p = 180^\circ$ (lit. a.); mithin $q = 180^\circ - p$ (§. 40. Zus.);
$o + q = 180^\circ$ (§. 40.); wenn nun

$$\begin{array}{l} \pm o \gtrless \pm p, \text{ so} \\ \hline q \lessgtr 180^\circ - p, \end{array}$$

was unmöglich ist.

c) $o = p$ (lit. b.);
$o = r$ (§. 41.)

$r = p$.

Zusatz: Durch einen Punct L (Fig. 37.) gibt es zu CD nur die Parallele AB; denn wäre auch PO zu CD parallel, so wäre CHL + HLA = CHL + HLP = 180° (lit. a.), was offenbar unmöglich ist.

§. 46.

Lehrsatz (Fig. 6.):

Wenn bei Parallelen der Winkel o ein rechter Winkel ist, so ist p auch ein rechter Winkel.

Beweis:

$o + p = 180°$ (§. 45.), nun ist
$o = 90°$, also

$p = 90°$.

I. Zusatz: Sind zwei Linien parallel, und steht eine auf die Durchschnittslinie NM senkrecht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

II. Zusatz: Zwei auf eine dritte Linie gezogene Perpendikel sind parallel (§. 44.).

III. Zusatz: Im Parallelogramme sind zwei an einer Seite liegende Winkel = 180° (§. 20, §. 45.).

IV. Zusatz: In dem Trapez ist (Fig. 19.) $C + D < 180°$, und $A + B > 180°$ (§. 20.).

§. 47.

Aufgabe: Durch einen gegebenen Punct L (Fig. 36.) zu CD eine Parallele zu ziehen.

Auflösung:

Von dem Punkte L lasse man eine Linie LN die Linie CD schneiden; dann trage man den Winkel p

nach L der Linie NM (§. 31.); endlich ziehe man durch L und den erhaltenen Durchschnittspunct die Linie AB.

Beweis:

o = p nach der Verzeichnung; also CD # AB (§. 44. b.).

§. 48.

Aufgabe: Jedes Parallelogramm zu verzeichnen.

Auflösung:

a) Bei dem Quadrate wird, wenn man den rechten Winkel D (Fig. 38.) mit DB gemacht hat, der Cirkel in C eingesetzt, und mit DB wird der Bogen op gemacht. Mit der nämlichen Cirkelöffnung DB schneidet man aus B den Bogen op. Endlich ziehe man CA, AB.

b) Beim Rechtecke (Fig. 39.) wird, wenn man den rechten Winkel CDB gemacht hat, der Cirkel in C eingesetzt, und mit DB der Bogen mn gemacht. Dieser Bogen wird dann aus B mit CD in A geschnitten, und man ziehe CA, AB.

c) Bei der Raute (Fig. 40.) wird, nachdem man den Winkel A mit seinen gleichen Schenkeln bestimmt hat, der Cirkel in C festgesetzt, und aus C wird mit AB der Bogen mn gemacht, der sodann aus B mit der Oeffnung AC in D geschnitten wird. Man ziehe nun CD, BD.

d) Bei dem Rhomboid (Fig. 41.) wird, wenn man den Winkel A und die Schenkel desselben bestimmt hat, aus C mit AB der Bogen mn gemacht, welcher nun aus B mit AC geschnitten wird. Man ziehe jetzt CD, DB.

Anmerkung: Für a, b. sieh §. 38. Anmerkung.

§. 49.

Lehrsatz (Fig. 17.):

Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Beweis:

CB = CB,
m = p ⎫
n = o ⎭ §. 45. c.

△BCD ≅ △CBA (§. 25.), also CA = DB, AB = CD (§. 28.).

§. 50.

Lehrsatz:

Wenn (Fig. 17.) AC = BD und CD = AB, so ist AC ‡ DB und CD ‡ AB.

Beweis:

AC = BD
CD = AB, und überdieß ist
CB = CB

△CDB ≅ △CAB (§.26.), folglich m = p, o = n (§.27.) u. AC ‡ DB, CD ‡ AB (§. 44. c.).

§. 51.

Lehrsatz (Fig. 17.):

Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Beweis:

Weil DA ein Parallelogramm ist, wo mithin die entgegenstehenden Seiten gleich sind (§. 20, 49.), so ist CA = DB, DC = AB, und zudem ist CB = CB. Folglich sind △ CBD ≅ △ CBA (§. 26.).

§. 52.

Lehrsatz (Fig. 42.):

In jedem Dreiecke halten alle Winkel 180°, d. i., $A + B + C = 180°$.

Beweis:

Man ziehe durch B mit AC eine Parallele (§. 47.); dann ist $x = o$, $z = p$ oder $x = A$, $z = C$ (§. 45. c.). Auch ist $y = y = B$; $x + B + z$ ist 180° (§. 14.) $= A + B + C$.

I. Zusatz: Im rechtwinkligen Dreiecke haben die zwei spitzigen Winkel 90° zusammen.

II. Zusatz: Im rechtwinkligen Dreiecke ergänzt ein spitziger Winkel den andern zu 90°, weßhalb ein solcher Winkel Complementswinkel heißt, der nämlich mit einem andern 90° macht, z. B. (Fig. 40.) $BAC + CAM = 90°$.

III. Zusatz: Im stumpfwinkligen Dreiecke haben die zwei spitzigen Winkel weniger, als 90°.

IV. Zusatz: Weiß man in einem Dreiecke zwei Winkel, so ist der dritte auch bekannt, indem man von 180° die zwei bekannten Winkel nur abziehen darf. Weiß man einen Winkel, so weiß man die Summe der beiden andern. — Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich sind, so ist der dritte dem dritten gleich.

V. Zusatz: Wenn in einem gleichschenkligen oder gleichseitigen Dreiecke ein Winkel bekannt ist, so ist jeder bekannt. Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel dem andern gleich (§. 27. Zus. II.) und jeder ist $= 60°$ oder $\frac{180°}{3}$. Im gleichschenkligen Dreiecke darf man, da die Winkel an der Grundlinie gleich sind (§. 27. Zus. I.), wenn ein solcher bekannt ist, nur diesen doppelten von 180° abziehen.

Ist der Winkel an der Spitze gegeben, so ziehe man diesen von 180° ab, und halbiere den Rest.

VI. Zusatz: Da beim Parallelismus ac # AC (Fig. 8.) der Winkel Bac = BAC und Bca = BCA (§. 45. b.), und überdieß A + B + C = a + B + c = 180° (Lehrs.), so ist, wenn zwei Winkel in zwei Dreiecken gleich sind, der dritte dem dritten gleich.

§. 53.

Lehrsatz (Fig. 43.):

Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so ist der äußere Winkel so groß, als die Summe der zwei innern entgegengesetzten, d. h., $z = x + m$.

Beweis:

$m + x + y = 180°$ (§. 52.)
$+ y + z = 180°$ (§. 40.)
$- \quad - \qquad -$

$m + x - z = 0; - z = - m - x, z = m + x$; oder
$m + x + y = y + z$, d. i., $m + x = z$.

§. 54.

Lehrsatz:

In jeder geradlinigen Figur ist die Summe aller Eckwinkel, wenn n die Zahl der Seiten ausdrückt, $= n \cdot 180° - 360° = (n - 2) 180°$.

I. Beweis (Fig. 44.):

Man nehme innerhalb der Figur einen Punct F an, und ziehe von allen Ecken A, B, C, D, E nach F gerade Linien. Es entstehen so viele Dreiecke, als Seiten sind. Da jedes Dreieck 180° hat, so haben alle Dreiecke n . 180°. Weil man jedoch

nur die Eckwinkel wissen will, so ziehe man alle Winkel um F, welche 360° betragen (§. 14.), ab. Der Ausdruck n . 180° — 360° löſ't sich in Factoren auf. Es wird nun (n — 2) 180°.

II. Beweis (Fig. 45.):

Man ziehe aus einem Ecke D zu allen andern Ecken Diagonallinien, und man wird sehen, daß, da zum ersten und letzten Dreiecke sammt der ersten und letzten Diagonallinie noch zwei Seiten der Figur erfordert werden, während zu den andern Dreiecken mit zwei Diagonalen nur eine Seite der Figur gehört, zwei Dreiecke weniger entstehen werden, als die Figur Seiten zählt, also n — 2 Dreiecke, deren jedes 180° hat.

Zusatz: Bei regulären Figuren (§. 21.) ist ein Winkel (Polygonswinkel) $= \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ $= \left(1 - \frac{2}{n}\right)180^\circ$. Also ist beim gleichseitigen Dreiecke ein Winkel $= (1 - 2/3)\ 180^\circ = 60^\circ$ (§. 52. Zus. V.); beim Quadrate ist ein Winkel $= (1 - 2/4)\ 180^\circ = 90^\circ$ (§. 20.); beim regulären Fünfecke ist ein Winkel $= (1 - 2/5)\ 180^\circ = 108^\circ$; beim regulären Sechsecke ist ein Winkel $= (1 - 2/6)\ 180^\circ = 120^\circ$.

Anmerkung: Der in diesem §. enthaltene Lehrsatz gilt auch bei Figuren von erhabenen Winkeln (Fig. 46.). Der Beweis ist hier zu weitläufig.

§. 55.

Lehrsatz (Fig. 47.):

Parallelogramme zwischen den nämlichen Parallelen und über gleichen Grundlinien sind gleich.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ EF = CD \end{array}\right\} \text{§. 49. also}$$

$$\begin{array}{l} AB = EF \\ BE = BE \end{array}$$

$AB + BE = EF + BE$, d. i., $AE = BF$;

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ CE = DF \end{array}\right\} \text{§. 49.}$$

$\triangle ACE \cong \triangle BDF$ (§. 26.)

$\triangle BGE = \triangle BGE$

$\triangle ACE - \triangle BGE = \triangle BDF - \triangle BGE$, d. i.
Trapez AG = Trap GF;

$\triangle CGD = \triangle CGD$

Trap. $AG + \triangle CGD$ = Trap. $GF + \triangle CGD$, endlich parall. AD = parall. ED.

§. 56.

Lehrsatz:

Dreiecke zwischen denselben Parallelen und über gleichen Grundlinien sind gleich.

Beweis (Fig. 47.):

Das Parallelogramm AD ist so groß, als das Parallelogramm CF (§. 55.). Zieht man nun die Diagonalen CB, DE, so sind die Dreiecke CBD, CED die Hälften davon (§. 51.). Wenn nun parall. AD = parall. CF, so ist ½ parall. AD = ½ parall. CF, oder $\triangle CBD = \triangle CED$.

I. Zusatz: Ein Dreieck ist die Hälfte des Parallelogrammes, mit dem es dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallellinien liegt.

II Zusatz: Da (Fig. 47.) AC als Perpendikel die Höhe sowohl der Parallelogramme AD, CF, als der Dreiecke CBD, CED ist, so sagt man: Parallelogramme, wie auch Dreiecke von

gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich.

§. 57.

Lehrsatz (Fig. 48.):

Das Quadrat, errichtet über die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes, ist gleich der Summe der über die Katheten errichteten Quadrate, d. h.,

$$BC^q = AB^q + AC^q.$$

Beweis:

$x = y$ (§. 14, 20.)
$o = o$

$o + x = o + y$;
$AC = CE$
$CB = CH$

$\triangle EBC \cong \triangle AHC$ (§. 24.);
$\triangle AHC = \frac{1}{2}$ parall. CK (§. 56. Zus. I.); auch
$\triangle EBC = \frac{1}{2}$ parall. DC $= \frac{1}{2} AC^q$ (§. 20.); daher
$\frac{1}{2}$ parall. CK $= \frac{1}{2} AC^q$, und
parall. CK $= AC^q$;

ferner $s = r$
$q = q$

$s + q = r + q$
$BL = BC$
$BM = BA$

$\triangle MBC \cong \triangle LAB$;
$\triangle LAB = \frac{1}{2}$ parall. LJ
$\triangle MBC = \frac{1}{2}$ parall. BN $= \frac{1}{2} AB^q$

$\frac{1}{2}$ parall. LJ $= \frac{1}{2} AB^q$, u. par. LJ $= AB^q$;
endlich par. CK + par. LJ, oder $BC^q = AC^q + AB^q$.

Anmerkung: Dieser Lehrsatz gilt auch für Zahlen, wie man beweisen wird.

§. 58.

Aufgabe: Ein Quadrat zu verdoppeln.

Auflösung (Fig. 49.):

Man ziehe die Diagonale AC, über welcher das Quadrat $AC^q = 2DC^q$.

Beweis:

$AC^q = AD^q + DC^q$ (§. 57.); weil $AD = CD$, so $AD^q = DC^q + DC^q = 2DC^q$.

§. 59.

Aufgabe: Zwei Quadrate in eines zu verwandeln.

Auflösung (Fig. 50.):

Man füge das Quadrat a unter einem rechten Winkel an das Quadrat b, und ziehe die Linie CD, über welcher das Quadrat c das verlangte ist (§. 57).

§. 60.

Geschichtliche Anmerkungen zu diesem Abschnitte:

Das ungleichseitige Dreieck soll nach Laertius Vorbringen Euphorbus aus Phrygien erfunden haben.

Thales von Milet machte 632 v. Chr. eine Reise nach Aegypten, und ließ sich noch in seinem Alter von den ägyptischen Priestern in der Geometrie unterrichten. Er erfand die Gleichheit der Scheitelwinkel und der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreieckes. Nach Proclus Angabe hat er zuerst gezeigt, daß der Durchmesser die Kreislinie und den Kreis in gleiche Hälften theile.

Pythagoras (+ 540 v. Chr.) nahm auch Unterricht von den ägyptischen Priestern, reis'te nach Italien, und erwarb sich als Philosoph und Mathematiker großen Ruhm. Er erfand, daß die drei Winkel des geradlinigen Dreieckes 180° halten. Auch soll er erfunden haben, daß das Quadrat der Hypotenuse so groß sei, als die Summe der Quadrate der beiden Katheten, weßwegen man diesen Lehrsatz auch den pythagorischen nennt. Sieh hierüber Wolfgang Müllers Abhandlung: Systematische Zusammenstellung der wichtigen bisher bekannten Beweise des pythagorischen Lehrsatzes. Nürnberg bei Lechner, 1819.

Euklides schrieb 300 v. Chr. zu Alexandria seine 15 Bücher Elemente. Derselbe nahm Folgendes als einen Grundsatz an, den er als eilften des ersten Buches (in der lateinischen Uebersetzung) so ausdrückte: Et si in duas rectas lineas altera recta incidens internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duae illae rectae lineae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. — Viele Mathematiker fanden Schwierigkeiten im Lehrsatze des §. 45., welcher der umgekehrte des §. 44. ist, und zwar in Hinsicht auf dessen logische Umkehrung. Man sehe Klügels, Professors in Helmstädt, geschichtliche Dissertation: Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio 1763. — Man kann (s. §. 36.) mit Hilfe der Elementar-Geometrie den Winkel nicht in drei gleiche Theile theilen, ausser im Falle er ein rechter ist. Es ist dieses die unter den Alten so berühmte Aufgabe: de trisectione anguli. Sieh Kästners Analys endlicher Größen §. 50.

III. Abschnitt.

Von dem Kreise.

---

§. 61.

Lehrsatz:

Bei gleichen Durchmessern sind die Halbkreise einander gleich. Eben so werden die Ausschnitte und Abschnitte gleich, deren Winkel am Mittelpuncte gleich sind. Endlich sind die Bögen gleicher Aus- und Abschnitte gleich.

Beweis:

Man lege die Kreise genau aufeinander; sie decken sich (§. 23. Zus. IV.), man mag sie drehen nach Belieben; woraus dann der Lehrsatz sich klar ergibt, wenn man die Kreise so lange dreht, bis sich die Winkel am Mittelpuncte (anguli centri) decken (§. 23. Zus. III.).

§. 62.

Lehrsatz:

Zu gleichen Kreissehnen gehören gleiche Bögen, und umgekehrt (Fig. 51.).

Beweis:

Da AB = AD (Voraussetzung), und überdieß CB = CA und CD = CA (§. 11.), so ist △ BCA ≅ △ ACD (§. 26.), und o = m (§. 27.), mithin der Bogen AB = dem Bogen AD (§. 13.). Wenn arc. AB = arc. AD (Voraussetzung), so ist o = m; ferner ist BC = AC, AC = CD, folglich △ BCA ≅ △ ACD (§. 24.), und Sehne AB = Sehne AD (§. 28.).

§. 63.

Lehrsatz (Fig. 52.):

Ein aus dem Mittelpuncte C auf die Sehne DE gezogener Perpendikel CF halbiert den Winkel am Mittelpuncte und die Sehne DE.

Beweis:

CD = CE (§. 11.)
CG = CG
CGD = CGE (Voraussetzung)

△ CGD ≌ △ CGE (§. 34. Zus.), ferner: D = E, weil CG = CG (§. 27.); da nun CGD = CGE und D = E, so ist h = e (§. 52. Zus. VI.), und DG = GE (§. 28.).

I. Zusatz: Weil h = e, so ist DF = FE (§. 13.).

II. Zusatz: Im gleichschenkligen Dreiecke theilt ein Perpendikel aus der Spitze auf die Grundlinie diese und den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile.

§. 64.

Lehrsatz (Fig. 53.):

Wenn man eine Sehne halbiert, und über dem Halbierungspuncte F einen Perpendikel errichtet, so ist dieser verlängert ein Durchmesser des Kreises.

Beweis:

AF = FB (Voraussetzung)
FD = FD
F = F (Voraussetzung)

△ AFD ≌ △ BFD (§. 24.)
AD = BD (§. 23.);
arc. AD = arc. BD (§. 62.);
AF = BF (Voraussetzung)
FE = FE
F = F (Voraussetzung)

△ AFE ≌ △ BFE (§. 24.);

AE = EB (§. 28.);
arc. AE = arc. EB (§. 62.);
arc. AD + arc. AE = arc. BD + arc. EB; d. h. der Halbkreis DAE = DBE, mithin ist ED der Durchmesser (§. 11. 2. Anmerk.).

§. 65.

Aufgabe: Eines gegebenen Kreises Mittelpunct zu finden.

Auflösung:

Man ziehe die Sehne AB (Fig. 53.), halbiere sie (§. 37.), und errichte über F einen Perpendikel (§. 38.), den man bis an die Peripherie verlängere. DE ist der Durchmesser des Kreises (§. 64.), welcher halbiert das Centrum angibt (§. 11.).

§. 66.

Aufgabe: Eine Kreislinie zu verzeichnen, welche durch drei gegebene und nicht in einer geraden Linie liegende Puncte A, B, C (Fig. 54.) geht.

Auflösung:

Man verbinde die Puncte durch die geraden Linien AB, BC; man halbiere diese Linien, und errichte über G und H Perpendikel. In c, wo sich dieselben schneiden, ist der Mittelpunct des Kreises.

Beweis:

Da ein gerader Winkel eine gerade Linie bildet (§. 6. b.), und Perpendikel auf eine gerade Linie parallel sind (§. 46. Zus. II.), so können nur Perpendikel auf die Schenkel eines hohlen Winkels sich durchschneiden, indem überdieß die Perpendikel auf den Schenkeln erhabener Winkel auseinander laufen.

G = G	H = H
AG = GB Voraussetzung:	BH = HC Voraussetzung:
Gc = Gc	cH = cH
△AGc ≌ △cGB (§. 24.);	△HcB ≌ HcC;
Ac = cB (§. 28.);	cB = cC (§. 28.).

Da nun Ac = cB = cC, so geht der Kreis wirklich durch A, B, C.

I. Zusatz: Durch diese drei Puncte A, B, C ist der Kreis nach Lage und Größe bestimmt.

II. Zusatz: Nach Anleitung dieses §. kann man auch den Mittelpunct eines gegebenen Kreises finden.

III. Zusatz: AcB, BcC sind nun auch Winkel am Mittelpuncte, Centriwinkel.

§. 67.

Erklärung (Fig. 53.)

Ein Winkel ADB oder AEB, dessen Scheitel D, E an der Peripherie anstoßen, und dessen Schenkel dieselben berühren, heißt Peripheriewinkel.

§. 68.

Lehrsatz:

Im Kreise ist der Centriwinkel noch einmal so groß, als der auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

Beweis:

In Fig. 53. ist der Centriwinkel ACE als äusserer Winkel gleich CAD + CDA (§. 53.). Weil CA = CD, so ist CAD = CDA (§. 27. Zus. I.); daher ist ACE = 2CDA = 2EDA (§. 7.). Eben so ist ECB = 2EDB; folglich ECA + ECB oder ACB = 2EDA + 2EDB oder 2ADB. Endlich (Fig. 55.) ist p + n = 2(o + q) nach §. 53. und §. 27. Zus. I., oder p + n = 2o + 2q; dann ist nach eben diesen §§. $\underline{+p = +2q}$

$n = 2o.$

I. Zusatz: Der Peripheriewinkel hat den halben Bogen seines Centriwinkels zum Maße, mithin den halben Bogen, auf welchem er steht.

II. Zusatz (Fig. 56.): Da der Centriwinkel ACB ein gerader Winkel zu 180° ist (§. 14.), so hat der Peripheriewinkel AEB auf den Endspuncten des Durchmessers AC + CB den halben Halbkreis oder 90° zum Maße.

III. Zusatz (Fig. 56.): Betrachtet man den Durchmesser AC + CB als Centriwinkel, errichtet man über des Durchmessers Endspuncten den Peripheriewinkel E, und überdieß mit dem Diameter über diesen ein gleichseitiges Dreieck (§. 29.), so ist ACB, AEB, AFB, wie 180, 90, 60 (§. 54. Zus.) oder wie 6, 3, 2 = 1, ½, ⅓.

IV. Zusatz: Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel keinen ganzen Halbkreis einschließen, ist spitzig, dessen Schenkel aber mehr als einen Halbkreis einschließen, ist stumpf.

V. Zusatz (Fig. 53.): Eines im Kreise beschriebenen Viereckes entgegengesetzte Winkel D + E haben 180°; denn

$$\left.\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2}\ \text{arc. } AEB \\ E &= \tfrac{1}{2}\ \text{arc. } ADB \end{aligned}\right\}\ \text{Zus. I.}$$

$$\begin{aligned} D + E &= \tfrac{1}{2}\ \text{arc. } AEB + \tfrac{1}{2}\ \text{arc. } ADB \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\text{arc. } AEB + \text{arc. } ADB) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(360^\circ) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Eben so ist A + B = 180°, also A + B = D + E.

§. 69.

Aufgabe: An einer Linie Endspunct D einen Perpendikel zu errichten.

Auflösung (Fig. 57):

Man mache aus dem beliebigen Puncte C mit CD einen Kreis; aus dem Durchschnittspuncte M ziehe man durch C bis an die Peripherie den Diameter MN, und verbinde die Puncte D, N zum Perpendikel am Endspuncte.

Beweis:

D ist ein Peripheriewinkel auf den Endspuncten des Durchmessers MN, also ein rechter Winkel (§. 68. II. Zus.), und DN ein Perpendikel (§. 6, 13.).

§. 70.

Lehrsatz (Fig. 58.):

Wenn man die Peripherie des Kreises in mehrere gleiche Theile getheilt hat, die Theilungspuncte mit Sehnen verbindet und von jedem Theilungspuncte die Radien zieht, so entstehen lauter congruente Dreiecke.

Beweis:

Da alle Radien gleich sind und jeder von zwei Radien eingeschlossene Mittelpunctswinkel (§. 13.), so sind alle Dreiecke congruent (§. 24.).

I. Zusatz: Alle Sehnen sind hier gleich (§. 28); ferner ist der Winkel CEF = EFG = FGD u. s. w., weil diese Peripheriewinkel auf gleichen Bögen aufstehen; mithin erhält man ein reguläres Polygon (§. 21.).

II. Zusatz: Ein Polygonswinkel wird durch den Radius halbiert; denn AC = AB (Zus. I.), CL = LB, LA = LA, somit △ CLA ≅ △ BLA (§. 26.); nun ist CAL = BAL (§. 27.).

III. Zusatz: Es entstehen lauter gleichschenklige Dreiecke, wo LCA = LAC (§. 27. I. Zus.).

IV. Zusatz: Der Winkel

CAL = LAB
CAL = LCA } Zus. II. und III.

also LAB = LCA;

daher ist auch LCA + CAL der Polygonswinkel, wie CAL + LAB

V. Zusatz: Man erhält den Centriwinkel, wenn man von 180° den Polygonswinkel abzieht (§. 52. Zus. IV. und §. 70. Zus. IV.). Da nach §. 54. die Summe aller Polygonswinkel = n.180° — 360°

ist, also ein Polygonswinkel $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ wird, so kommt für den Centriwinkel $= 180^\circ - 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$, wo n die Seitenzahl bedeutet; z. B. beim regulären Sechsecke ist der Centriwinkel $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, beim 10 Ecke $= \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

VI. Zusatz: Weil beim regulären Sechsecke der Centriwinkel 60° hat, folglich der Polygonswinkel $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, so hat der halbe Polygonswinkel oder jeder der Sehne anliegende Dreieckswinkel (Zus. IV.) auch 60°; daher ist hier ein gleichseitiges Dreieck (§. 52. Zus. V), und die Sehne ist dem Radius gleich, welcher 6mal an der Peripherie herumgetragen werden kann.

§. 71.

Aufgabe: In den Kreis ein reguläres Vieleck zu beschreiben.

Auflösung:

Man suche den Centriwinkel (§. 70. V. Zus.), beschreibe einen Kreis, und setze an einen Radius den gefundenen Centriwinkel, welcher einen Bogen einschließt. Man ziehe nun die Sehne, welche sich n mal am Umfange h[illegible]utragen läßt; z. B. (Fig. 59.) man soll in den Kr[illegible] ein gleichseitiges Dreieck (§. 27. Zus. II.) machen. Der Centriwinkel ist $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$. Man setze diese[illegible] Winkel an den Radius CB; zwischen CB und CD liegt ein Bogen zu 120°; die Sehne DB ist die verlangte Dreiecksseite. Soll man (Fig. 7.) ein Quadrat in den Kreis machen, so ist $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Man setze diesen Winkel an den Radius CG, so daß zwischen CG und CD

90° sind; GD ist die Quadratseite. Will man (Fig. 60.) im Kreise ein regelmäßiges Fünfeck, so ist $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Diesen Winkel trage man an dem Radius CE auf; die Sehne ED ist die verlangte Fünfecksseite.

Anmerkung: Das gleichseitige Dreieck beschreibt man im Kreise ohne des Centriwinkels Berechnung, wenn man den Radius 6mal im Kreise herumtragt, und jeden zweiten Theilungspunct durch eine Sehne verbindet. Um ein Quadrat in den Kreis zu machen, ziehe man zwei in dem Centrum sich unter rechten Winkeln schneidende Durchmesser (§. 38.).

§. 72.

Aufgabe: Ueber einer gegebenen Linie ein reguläres Polygon zu verzeichnen.

Auflösung:

Man suche den Polygonswinkel (§. 54. Zus.), den man an jedem Endspuncte der Linie auftrage. Diesen Polygonswinkel halbiere man an beiden Endspuncten der Linie (§. 36.). Die Halbierungslinien sind Radien (§. 70. Zus. II.), und schneiden sich. Aus dem Durchschnittspuncte mache man mit einer Halbierungslinie einen Kreis, in welchem die gegebene Linie als Sehne n mal herumgetragen werden kann. Will man z. B. über ED (Fig. 60.) ein reguläres Fünfeck beschreiben, so setze man an E, D den Polygonswinkel 108° (§. 54. Zus.), den man halbiere, so daß CED = CDE = 54° wird; aus C, dem Durchschnittspuncte der Halbierungslinien, mache man mit CE einen Kreis, und ED läßt sich in demselben 5 mal auftragen, da $180^\circ - 2 \times 54^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ den Centriwinkel gibt, und $5 \times 72^\circ = 360^\circ$ ist.

Anmerkung: Zu den §§. 71 und 72 braucht man ungemein gut und richtig gearbeitete Transporteurs.

§. 73.

Geschichtliche Anmerkung zu diesem Abschnitte.

Man kann das reguläre Fünfeck und Zehneck so geometrisch beschreiben, wie das regelmäßige Sechseck.

Ptolomäus in seinem Almagest hat schon diese Verzeichnung gelehrt.

Renaldinus wollte eine allgemeine Art, regelmäßige Vielecke im Kreise zu machen, erfunden haben, und zwar dadurch (Fig. 58.), daß er den Durchmesser in so viele gleiche Theile theilte, als das verlangte Vieleck Seiten zählen sollte; daß er mit dem Durchmesser über oder unter demselben ein gleichseitiges Dreieck setzte, von dessen Spitze er durch den drittletzten gleichen Theil des Diameters bis an die Peripherie eine gerade Linie zog, und die Sehne DG von des Durchmessers Endspuncte bis zum Durchschnittspuncte der beschriebenen geraden Linie als Polygonsseite angab. Dieses ist die regula Renaldini, von der aber Wolf gezeigt hat, daß sie nicht allgemein richtig sei, obwohl anwendbar.

IV. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 74.

Erklärung:

Alle gleichseitige Dreiecke sind ähnlich (§. 23.); eben so jedes Quadrat dem andern Quadrate.

§. 75.

Lehrsatz (Fig. 8.):

Wenn in einem Dreiecke ACB eine Linie ac

zu einer Seite AC parallel gezogen wird, dergestalt daß BA, CB geschnitten werden, so verhält sich:

a) Ba : BA = Bc : BC
b) Ba : BA = ac : AC.

Beweis:

a) ac # AC (Voraussetzung),
cd # aA (Verzeichnung);
also Bca = BCA, }
Bac = BAC = cdC } §. 45. b.

Es sei Ba = aA, so ist Ba = cd, weil aA = cd (§. 49.)
ferner ist Bac = cdC, und Bca = BCA,
B = dcC (§. 52. VI. Zus.)

△ aBc ≅ △ dcC (§. 25), und
Bc = cC (§. 28.), endlich:
Ba : BA = Bc : BC.

b) Ba : BA = Bc : BC (lit. a.); weil cd # BA, so
*C*c : CB = *C*d : CA, d. i., weil Cc = cB (§. 28.)

Ba : BA = *C*d : CA, oder weil Cd = ac (§. 28.)
Ba : BA = ac : AC; oder auch: Ba : ac = *BA* : AC.

Zusatz: In lit. a. kann man setzen: *BA* : *BC* = *B*a : *B*c; es wird *BA* — *B*a : *BC* — *B*c = *BA* : *BC* = *B*a : *B*c, d. h. aA : cC = *BA* : *BC* = *B*a : *B*c.

§. 76.

Lehrsatz (Fig. 61.):

Sind zwei Seiten des Dreieckes AC, CB so von einer geraden Linie MN durchschnitten, daß sich die ganzen Seiten verhalten, wie die abgeschnittenen obern oder untern Stücke, so ist MN # AB.

Beweis:

Wäre MN nicht # mit *AB*, so wäre es Mn, und dann verhielten sich *CA* : *CB* = *CM* : Cn = AM : nB; aber nach §. 75. Zus. ist *CA* : *CB*

$= CM : CN = AM : NB$; daher würde $CM : CM = Cn : CN$, und $AM : AM = nB : NB$; also müßte $Cn = CN$ und $nB = NB$ sein, was unmöglich ist.

§. 77.

Lehrsatz:

Die Seiten, welche in zwei ähnlichen Dreiecken einerlei Winkel einschließen, haben einerlei Verhältniß.

Beweis (Fig. 62.):

Wenn $B = b$, so lege man den Punct b auf B; die Schenkel ba, bc werden auf BA, BC zu liegen kommen, wodurch die Puncte a, c und mit ihnen die Linie ac bestimmt sind. Setzt man nach §. 23. auch $a = A$ und $c = C$, so ist $ac \# AC$ (§. 44. b.). Nun ist $BA : BC = ba : bc$ (§. 75. Zus.).

Zusatz: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich sind, ist der dritte dem dritten gleich (§. 52. Zus. VI.); und wenn alle drei Winkel gleich sind, so sind die homologen Seiten proportioniert (s. vor. Bew.), und die Dreiecke sind ähnlich (§. 23.).

§. 78.

Lehrsatz (Fig. 62.):

Wenn in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele gezogen wird, so sind die zwei Dreiecke ähnlich.

Beweis:

Die Dreiecke haben gleichviele Seiten; die Winkel sind gleich (§. 45. b. und §. 52. Zus. VI.); die einschließenden Seiten sind proportionirt (§. 77.). Also sind die Dreiecke ähnlich (§. 23.).

§. 79.

Lehrsatz (Fig. 62.):

Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gleich ist, und die einschließenden Seiten proportioniert sind, so sind sie Dreiecke ähnlich.

Beweis:

$B = b$, und, da $BA : BC = ba : bc$, die Linie $ac \# AC$ (§. 76.), folglich auch $a = A$, $c = C$; mithin sind die Dreiecke ähnlich (§. 23.).

§. 80.

Lehrsatz (Fig. 62.):

Wenn alle Seiten zweier Dreiecke proportioniert sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Beweis:

Ist $ba : bc = BA : BC$, oder $ba : ac = BA : AC$, oder $bc : ac = BC : AC$, so ist $ac \# AC$ (§. 76.), mithin ist $a = A$, $c = C$, $b = B$, und die Dreiecke sind ähnlich.

§. 81.

Aufgabe: Zu drei geraden Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden.

Auflösung (Fig. 61.):

Man füge die gegebenen Linien *CM*, *MA* in eine *CA* zusammen; an *C* setze man unter einem beliebigen Winkel die dritte gegebene Linie *CN*. Man verbinde M, N durch die Linie *MN*, zu welcher man an A die Parallele *AB* ziehe (§. 47.). *NB* ist nun die verlangte vierte Proportionale.

§. 82.

Aufgabe: Zu zwei geraden Linien die dritte geometrische Proportionallinie zu finden.

Auflösung (Fig. 63.):

Die zwei gegebenen Linien *Ca*, aA füge man in die einzige, *CA* zusammen; dann bringe man Aa = *BC* unter einem beliebigen Winkel an *C*, und verbinde a, *B* durch a*B*, mit welcher letzten Linie man bei A die Parallele *AD* nach §. 47. ziehe. Es ist jetzt *BD* die verlangte dritte Proportionale; denn nach §. 75. Zus. ist

$$Ca : aA = CB : BD, \text{ d. h.}$$

$$Ca : aA : BD.$$

§. 83.

Aufgabe (Fig. 64.): Eine gerade Linie CD in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:

An *C* füge man unter einem beliebigen Winkel die Linie *CE*, welche Linie *CE* man z. B. in 5 beliebige gleiche Theile theile; dann ziehe man aus dem 5ten Theilungspuncte an D die Linie Ds, und mache zu dieser aus allen übrigen Theilungspuncten Parallelen, durch welche *CD* auch in 5 gleiche Theile getheilet wird (§. 75. Bew.).

Zusatz: Eben so kann man eine Linie *CH* (Fig. 65.) nach jenem Verhältnisse theilen, nach welchem eine andere Linie *CD* getheilt ist (§. 75.).

Anmerkung: Die §§. 81, 82 und 83 können auch arithmetisch gelöset werden.

§. 84.

Lehrsatz (Fig. 66.):

Wenn man im rechtwinkligen Dreiecke ADE von dem rechten Winkel D auf die Hypotenuse

einen Perpendikel DB fallen läßt, so sind die zwei Dreiecke dem ganzen Dreiecke ähnlich, d. h.

$\triangle ADB \backsim \triangle ADE$, $\triangle BDE \backsim \triangle ADE$.

Beweis:

$D = B$,	$D = B$ (Voraussetzung)
$A = A$, also	$E = E$, also
$r = E$	$m = A$

$\triangle ADB \backsim \triangle ADE$, und $\triangle BDE \backsim \triangle ADE$; (§. 77. Zus.).

I. Zusatz: Mithin ist $\triangle ADB \backsim \triangle BDE$.

II. Zusatz: Da diese 3 Dreiecke ähnlich sind, so

$AB : AD : AE$; $\quad AD^2 = AB \times AE$;
$BE : DE : AE$; $\quad DE^2 = BE \times AE$;

$AD^2 + DE^2 = AB \times AE + BE \times AE$;
$AD^2 + DE^2 = AE(AB + BE) = AE(AE) = AE^2$.

Vergleiche §. 57. Anmerk.

III. Zusatz: Wegen der Aehnlichkeit verhält sich AB : DB : BE; d. i. wenn a = AE oder Durchmesser, DB = y oder Ordinate, und AB = x oder Abscisse, also BE = AE — AB = a — x, so wird x : y : a — x, und $y^2 = ax - x^2$, d. h. im Kreise ist das Quadrat der Ordinate gleich der Differenz jener Producte, deren Factoren der Durchmesser und die Abscisse, dann die doppelt gesetzte Abscisse ist.

IV. Zusatz (Fig. 67.): Es sei AC = CE = ½ a = ½ AE = r = DC, DB = y, CB = x; es ist AB = AE — BE = AB — (BC + CE) = a — (x + r) = 2r — x — r = r — x. Es verhält sich wieder AB : DB : BE oder BC + CE, d. h. r — x : y : x + r, und $y^2 = (r - x)(r + x) = r^2 - x^2$; d. i. Das Quadrat der Ordinate ist gleich der Differenz der Quadrate des Radius und der Abscisse.

Anmerkung: Im III Zusatze wurden die Abcissen vom Puncte A an, in diesem Zusatze aber vom Centrum C an gerechnet.

§. 85.

Lehrsatz (Fig. 68.):

Der Perimeter ähnlicher Figuren verhält sich wie die an einerlei Winkeln liegende Seite, d. h.

$$\text{PERJM. } BAC : \text{perim. } bac = BC : bc.$$

Beweis:

Da alle Winkel gleich, und die homologen Seiten proportioniert sind (§. 23.), so ist $AB : BC = ac : bc$, woraus $AB + BC : BC = ab + bc : bc$, und

$AB + BC : ab + bc = BC : bc$. Nun verhält sich

$AC : ac = BC : bc$, mithin

$AB + BC : ab + bc = AC : ac$; dann endlich

$AB + BC + AC : ab + bc + ac = AC : ac = BC : bc$.

§. 86.

Lehrsatz (Fig. 69.):

Wenn man in ähnlichen Figuren von gleichnamigen Winkeln ähnlich liegende Diagonallinien zieht, so entstehen lauter ähnliche Dreiecke.

Beweis:

Es sind vermöge der Aehnlichkeit gleich viele und proportionierte Seiten, wie auch gleiche Winkel in den Figuren (§. 23.). Also ist $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, $F = f$; ferner $AB : BC = ab : bc$, $BC : CD = bc : cd$ u. s. w. Wenn in 2 Dreiecken ABC, abc der Winkel $B = b$, und $AB : BC = ab : bc$, so sind sie ähnlich (§. 79.).

Somit ist $BAC = bac$, und $BC : AC = bc : ac$. Allein es ist auch das Verhältniß $BC : CD = bc : cd$, also

$AC : CD = ac : cd$.

Da $B = b$ und $BAC = bac$, so ist $BCA = bca$ (§. 52. VI. Zus.); ferner

$C = c$

$BCA = bca$

$C - BCA = c - bca$, d. i. $ACD = acd$, mithin $\triangle ACD \sim \triangle acd$ (§. 79.).

Zusatz (Fig. 69.): Die Perimeter dieser ähnlichen Dreiecke verhalten sich, wie die aus einerlei Winkel ähnlich gezogenen Diagonalen, d. i. PER. ABC : per. abc = AC : ac (§. 85.).

§. 87.

Erklärung (Fig. 70.):

Eine gerade Linie mn, die außer dem Kreise liegt, und nur einen Punct mit diesem gemein hat, heißt Tangens; die gerade Linie op, die einen Punct in, und einen Punct außer demselben hat, Secans.

§. 83.

Lehrsatz (Fig. 70.):

Die Tangens macht mit dem Radius bei D einen rechten Winkel.

Beweis:

Es sei mCD = nCD, dann sei Cm = Cn; es ist CD = CD, also △ mDC ≅ △ nDC (§. 24.), somit ist mDC = nDC (§. 27.).

Zusatz: Wenn man eine Tangens ziehen will, so ziehe man einen Radius CD, an dessen Endspunct D man Dn perpendiculär errichte (§. 69.).

§. 89.

Lehrsatz (Fig. 71.):

Der Winkel C zweier Secanten ausser dem Kreise ist gleich der Differenz der halben Bögen, die er abschneidet, d. h. $C = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DE$.

Beweis:

Der Peripheriewinkel $x = \frac{1}{2}AB$ (§. 63. I. Zus.); ferner der Peripheriewinkel $y = \frac{1}{2}DE$; auch ist $x = y + C$ (§. 53.), und $C = x - y$; also ist $C = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DE$.

§. 90.

Lehrsatz (Fig. 71.):

Wenn zwei Secanten außerhalb des Kreises sich schneiden, so verhalten sich die außerhalb desselben abgeschnittenen Stücke umgekehrt zu den ganzen Secanten, d. ist CD : CE = CB : CA.

Beweis:

C = C, A = B, weil DE für beide Winkel das Maß ist, also ist BDC = AEC (§. 52. VI. Zus.); ferner sind die △ AEC ∽ △ BDC (§. 77. Zus.); folglich CD : CE = CB : CA.

V. Abschnitt.

Von Messung und Verwandlung der Figuren.

§. 91.

Erklärung:

a) Messen heißt die Länge, die Länge und Breite, die Länge, Breite und Tiefe (§. 3.) nach einem bestimmten ähnlichen Maße (Fuß ꝛc.) angeben.

b) Theilt man den Fuß (§. 22.) in 10 gleiche Theile (Zolle), jeden von diesen wieder in 10 gleiche Theile (Linien), jeden von diesen wieder in 10 gleiche Theile (Scrupel), so ist dieß das Decimalmaß; theilt man aber denselben Fuß in 12 gleiche Theile (Zolle) u. s. w., so ist dieß das Duodecimalmaß.

c) Ein Quadrat, dessen Seiteein Fuß, 1 Zoll ꝛc. ist, heißt Quadratfuß, Quadratzoll ꝛc. (□', □'').

Anmerkung: 1) Die Arithmetik lehrt die Verwandlung des Decimalmaßes in das Duodecimalmaß, und umgekehrt, wie auch die Reductionen verschiedener

Längen

Längen- und Flächenmaße; z. B. wie viele Duodecimalzolle geben $3\frac{1}{4}$ Decimalzolle? Man setze an:

Dcz. | Ddz. | Dcz.
10 | 12 | $3\frac{1}{4}$, oder
5 | 6 | $3\frac{1}{4}$,
4 | | 13,

$: 20 \,|\, 78 \,|\, 3\frac{9}{10}$ Ddz.
60
18
20

Ferner: Wie viele Decimal □″ geben 113 Dd. □″? Man schreibe an:

Dd. | Dc. | Dd.
144 | 100 | 113, oder
36 | 25 | 113

113
25
565
226

$: 36 \,|\, 2825 \,|\, 78\frac{17}{36}$ Dc. □″.
252
305
288
17

2) Warum 144 : 100, wird gleich nachher ganz klar sein.

§. 92.

Lehrsatz (Fig. 72.):

Wenn man in einem Parallelogramme BD im Puncte J der Diagonale AC zu den Seiten BC = AD und BA = CD die Parallelen EF, GH zieht, so sind die Parallelogramme BJ, JD, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Beweis:

△ ABC $\cong$ △ ADC (§. 51.); weil EH, GF auch Parallelogramme sind (§. 20, 49.), sind auch △ AEJ $\cong$ △ AHJ und △ JGC $\cong$ △ JFC (§. 51.);

also ist $\triangle$ ABC — ($\triangle$ AEJ + $\triangle$ JGC) = $\triangle$ ADC — ($\triangle$ AHJ + $\triangle$ JFC), d. h., BJ = JD.

Zusatz: Ist BD ein Quadrat, so besteht es offenbar aus den zwei Quadraten EH, GF und den zwei gleichen Rechtecken BJ, JD.

§. 93.

Aufgabe (Fig. 38.): Man soll den Flächeninhalt des Quadrates finden.

Auflösung:

Man messe DB, es habe z. B. 4'; also wird auch *CD* = 4' sein (§. 20.). Nun multipliciere man DB mit *CD*; das Quadrat hat 16 □'.

Beweis (Fig. 73.):

Wenn DB = 4' ist, und man dem Inhalte nach Flächen nur durch Flächen (§. 91. a.) bestimmen kann, so läßt sich das Rechteck Df = 4Dd offenbar 4mal an DC anlegen; man erhält also 4Df = 4 . 4Dd = 16*D*d = 16 □' (§. 91. c.).

Anmerkung: Vergleiche §. 91. Anmerk. 2.

I. Zusatz: Eben so wird der Inhalt des Rechteckes CB (Fig. 74.) = 12 □', wenn DB = 4' und *CD* = 3' ist, indem DB × *CD* = 4 × 3 = 12 □' gibt (Sieh Fig. 73. wo Df = 4Dd = 4□' abgezogen wurde.)

II. Zusatz: Bedeutet (Fig. 74.) DB die Basis B, und *CD* die Höhe A des Rechteckes, so wird rectang. = B . *A*.

§. 94.

Aufgabe (Fig. 75.): Ein Rechteck in ein gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung:

Man ziehe die Seite GB des Rechteckes in eine gerade Linie mit der andern Seite BD desselben, so

daß *AD* entsteht. Diese Linie *AD* halbiere man (§. 37.), und mache mit CA aus *C* einen Halbkreis. Die Seite BG verlängere man bis an die Peripherie; dann ist BF die gesuchte Seite des Quadrates FE.

Beweis:

AB oder GB : BF : BD (§. 84. Zus. III.)
$BF^2 = GB \times BD$.

§. 95.

Aufgabe: Den Inhalt eines Rhombus und Rhomboids zu finden.

Auflösung (Fig. 17. 18.):

Man messe DB, und die Höhe AE (§. 56. Zus. II.); dann multipliciere man diese Zahlen.

Beweis:

Rhombus und Rhomboid lassen sich bei *D* = 90° leicht in Rechtecke verwandeln; diese Rechtecke stehen auf denselben Grundlinien und sind, da sie auch dieselbe Höhe haben, den zwei genannten Figuren gleich (§. 56. Zus. II.). Daher ist die Ausmessungsart, wie bei den Rechtecken (§. 93. Zus. II.).

§. 96.

Aufgabe (Fig. 76.): Jedes Dreieckes Inhalt anzugeben.

Auflösung:

Da das Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von der nämlichen Grundlinie und Höhe ist (§. 56. Zus. I. und II.), so messe man die Grundlinie AC, den Perpendikel BD, und dividiere das Product dieser Zahlen mit 2.

§. 97.

Lehrsatz:

Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich, wie die Höhen.

Beweis:

a) PARALL. = AB
parall. = ab

PARALL. : parall. = AB : ab.

Ist nun B = b, so PAR. : par. = A : a.

b) △ = ½AB
△ = ½ab

△ : △ = ½AB : ½ab = AB : ab.

Ist B = b, so △ : △ = A : a.

§. 98.

Lehrsatz (Fig. 77.):

Der Inhalt der Trapez ist gleich der mit ihrer halben Höhe multiplicierten Summe der Zahlen, welche die Länge der Parallelen bezeichnen.

Beweis:

Trap. BD = △ ACB + △ ACD;
△ CAB = ½BE . BC; △ ACD = ½BE . AD; mithin ist trap. BD = ½BE . BC + ½BE . AD = ½BE(BC + AD). Nennt man BE = A, BC = b, AD = B, so wird trap. = ½A(b + B).

§. 99.

Aufgabe (Fig. 78.): Ein Dreieck in ein gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung:

Man ziehe an die Spitze B zu AC die dieser Linie gleiche Parallele BD (§. 47.). Zu AB mache man an *C* die dieser Linie ebenfalls gleiche Parallele *CD*. Nun ist parall. AD = 2 △ ABC, und ½ parall. AD oder AE oder F*D* = △ ABC (§. 56. Zus. I. und II.). Jetzt mache man F*D* rechtwinklig, oder gleich dem Rechtecke F*D* (§. 95. Bew.), und verwandle endlich rectang. F*D* nach §. 94. in ein Quadrat.

§. 100.

Aufgabe (Fig. 79.): Mehrere Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung:

Die drei Grundlinien AC, *C*E, EG nehme man für die eine Linie AG (Grundlinie) und bei gleicher Höhe MA = FG ziehe man die Seite MG.

Beweis:

△ BAC = △ AMm
△ CDE = △ mMn } §. 56.
△ EFG = △ nMG

△ BAC + △ *CDE* + △ EFG = △ AMm + △ mMn + △ nMG = △ AMG.

§. 101.

Aufgabe (Fig. 80.): Den Inhalt eines Polygons zu finden.

Auflösung:

Man theile das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, bestimme durch Perpendikel die Höhen der Dreiecke, berechne diese Dreiecke und zähle sie zusammen.

§. 102.

Aufgabe (Fig. 81.): Für einen Radius die Länge der Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes im Kreise zu finden.

Auflösung:

Man ziehe die Sehne $EF = CE = r$ (§. 70. Zus. VI.) und halbiere sie; $CH^2 = f^2 = EC^2 - EH^2 = r^2 - (\frac{1}{2}EF)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$ (§. 84. Zus. II.), und $f = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r \times 1{,}7320508 \ldots\ldots$

Da EF die Sechseckseite ist, so ist ED wegen $EH = \frac{1}{2}EF$ die Zwölfeckseite (§. 71. Anm.); es ist wieder nach §. 84. Zus. II. $ED^2 = EH^2 + HD^2$, d. i., $ED^2 = \frac{1}{4}r^2 + HD^2 = \frac{1}{4}r^2 + (r - \frac{1}{2}r\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4}r^2 + r^2 - r^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}r^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$, und

$$ED = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}} = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{3})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

I. Zusatz: Für $r = 1$ wird $ED = 0{,}5176 \ldots.$, mithin der Perimeter des regulären Zwölfeckes $= 6{,}211656$, und $2r$ oder a oder d verhält sich zu $6{,}211656$, wie $1 : 3{,}105828$.

II. Zusatz: Auf eine gleiche Weise fände man zu d (Durchmesser) den Perimeter des regulären 24, 48, 96 ꝛc. Eckes, wobei ersichtlich die Polygonsseite immer kleiner wird, je näher man so dieselbe ihrem Bogen rückt.

III. Zusatz: Würde man die Berechnung bis auf ein reguläres 768 Eck fortsetzen, so fiele der Perimeter desselben mit der Kreislinie beinahe zusammen. Da der Perimeter dieses regulären 768 Eckes $= 6{,}2830 \ldots\ldots$ gefunden ward, und dieses Resultat ohne vielen Mangel mit der Peripherie (p) des Kreises zusammenstimmt, so sagte man: $2r$ oder $d : p = 2 : 6{,}2830 \ldots. = 1 : 3{,}1415 \ldots. = 1 : \pi$.

IV. Zusatz: Man betrachtete also den Kreis als ein reguläres Unendlicheck.

V. Zusatz: Da man vom 768 Ecke zum 1536 Ecke, von diesem zum 3072 Ecke u. s. w. schreiten kann, so wird π immer genauer und genauer.

VI. Zusatz: $d : p = 1 : \pi$ (Zus. III.),

also $p = d\pi = 2r\pi$, und

$$d = \frac{p}{\pi}.$$

§. 103.

Aufgabe: Aus d, dann der Anzahl n der Grade eines Bogens dessen Länge b zu finden.

Auflösung:

$n^o : 360^o = b : p = b : d\pi;$

$$b = \frac{n^o \times d\pi}{360^o}; \text{ z. B. } d = 2', n = 180^o,$$

$$\text{so ist } b = \frac{180^o \times 2 \times 3{,}1415\ldots}{360^o} = 3{,}1415'\ldots$$

Zusatz: Aus b und d die Zahl der Grade n zu finden, geschieht so:

$$b = \frac{n^o . d\pi}{360^o}; \; 360^o b = n^o d\pi; \; n^o = \frac{360^o b}{d\pi}.$$

§. 104.

Aufgabe: Den Flächeninhalt des Kreises zu finden.

Auflösung:

Da man den Kreis als ein reguläres Unendlicheck betrachten kann (§. 102. Zus. IV.), so kann man sich von jedem Ecke den Radius gezogen denken; es entstünden mithin unendlich viele gleichschenklige Dreiecke, alle von derselben Höhe (Radius) und von den-

selben Grundlinien. Man kann diese Dreiecke laut §. 100. in ein Dreieck verwandeln, wenn man die Grundlinien als eine Grundlinie und die gemeinschaftliche Höhe als Höhe des Dreieckes nimmt. Somit wäre p Basis (§. 102. Zus. III.) und r Höhe, und Circ. $= p \cdot \frac{1}{2}r$ (§. 96) $= d\pi \times \frac{1}{2}r = 2r\pi \times \frac{1}{2}r = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$.

I. Zusatz: Weil nach §. 102. Zus. V. die Berechnung der regulären Vielecke immer weiter hin geschehen kann, also die Perimeter immer, wenn auch ungemein wenig, von der Peripherie abweichen, so wird man nach §. 104. nie ein dem Kreise nach aller Schärfe gleiches Dreieck finden können, um dieses letztere in ein dem Kreise ganz gleiches Quadrat (§. 99.) zu verwandeln.

II. Zusatz: $C = \frac{1}{4}d^2\pi$; also $\sqrt{\frac{4C}{\pi}} = d$.

III. Zusatz: a) Sector $=$ arc. $\frac{1}{2}$r.
b) Segmentum EHFD (Fig 81.) $=$ Sector $- \triangle$EFC.

IV. Zusatz: Der zwischen zwei (concentrischen) Kreisen (Fig. 7.) enthaltene Ring (annulus) $= R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2) = \pi((R + r)(R - r))$.

§. 105.

Lehrsatz:

Zwei Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser.

Beweis:

$$C = R^2\pi = \frac{1}{4}D^2\pi$$
$$c = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$$
$$C : c = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§. 106.

Lehrsatz:

Der Inhalt des Kreises verhält sich zum Quadrate seines Durchmessers beinahe, wie 6233 : 8000.

Beweis:

Wenn der Diameter 10.000, so ist der Umfang beinahe 31.415 (§. 102. Zus. III. und VI.). Nun ist $10000^2 = 100'000.000$, und der Inhalt des Kreises ist $= \frac{1}{4} \cdot 100'000.000 \cdot 3,1415 \ldots$ (§. 104.) $= 78'537.500$. Mithin verhält sich der Inhalt des Kreises zum Quadrate seines Durchmessers, wie $78537500 : 100000000 = 785375 : 1000000 = 157075 : 200000 = 31415 : 40000 = 6283 : 8000$.

Zusatz: Statt 6283 : 8000 kann man ohne großen Fehler 11 : 14 setzen.

§. 107.

Geschichtliche Anmerkungen zu diesem Abschnitte:

Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise gaben die alten Inder schon zu 1250 : 3927 oder 1 : 3,1416 an. Dasselbe steht in einem Buche der Braminen: Ayeen Akbery, und ist das älteste bekannte.

Archimedes (de circuli dimensione) gab jenes Verhältniß an, als $7 : 22 = 1 : 3,142857 \ldots$ und als $71 : 223 = 3,1408 \ldots$ Auch ist das Verhältniß 11 : 14 (§. 106. Zus.) von ihm.

Adrian Metius von Alcmar, Prof. zu Franecker, gibt das genannte Verhältniß an, wie $113 : 355 = 1 : 3,1415929$.

Ludolph von Ceulen, aus Hildesheim, Prof. zu Leiden, fand zum Theile nach §. 102. und auf mühevollem Wege, daß $d : p = 1 : 3,14159265358979323846264338327950288$, wobei ihm sein Schüler, Peter Cornelis, half. Man sehe seine Schrift de circulo et adscriptis, Leiden, 1619.

Machin, Lagny, Euler (de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi) rechneten bis 127 Decimalstellen, Vega bis 140, und das oxford'sche Manuscript bis 157.

Ehe man diese erstaunliche Näherung hatte, beschäftigte man sich viel damit, ein dem Kreise nach aller Schärfe gleiches Quadrat zu finden oder den Kreis zu quadrieren. Allein weil das Verhältniß von d : p nicht nach aller Schärfe, obwohl von dieser ungeheuer wenig abweichend, gefunden ist, so tritt dagegen §. 104. Zus. I. ein. Auch die Infinitesimalrechnung gibt die ludolphische Näherung, jedoch sehr schnell; sie liefert also auch keine vollständige Quadratur des Kreises.

Durch die lunulas Hippocratis oder die mondförmigen Kreisabschnitte des Kaufmannes Hippokrates von Chios kann man wohl einzelne Kreisstücke genau quadrieren.

Die Quadratrix Dinostratis taugt ebenfalls zur Kreisquadratur nicht.

Legendre sagt: Die Quadratur des Cirkels ist nunmehr unter die müssigen Fragen gesetzt, womit sich nur jene noch beschäftigen, welche kaum die Anfangsgründe der Geometrie verstehen!

VI. Abschnitt.

Von den geometrischen Körpern.

§. 108.

Erklärungen:

a) Ein Körper (Fig. 82.), welcher von 2 congruenten Parallelflächen und so vielen Parallelogrammen, als jene Flächen Seiten haben, eingeschlossen ist, heißt ein Prisma.

Die 2 congruenten Flächen ABCD, FEGH, dann

ABC, DEF heißt man die Grund-, und die Parallelogramme FB ꝛc., DB ꝛc. die Seitenflächen.

Es gibt 3, 4 ꝛc. eckige Prismen.

b) Ein Körper (Fig. 83.), begrenzt von 2 congruenten Parallelkreisen und einer krummen Seitenfläche, heißt Walze (cylindrus).

c) Ein Körper (Fig. 84.), begrenzt von einer geradlinigen Figur und von so vielen in einer Spitze E zusammenlaufenden Dreiecken, als die Figur Seiten hat, wird Pyramide (pyramis) genannt. ABDC heißt die Grundfläche.

d) Ein Körper (Fig. 85.), begrenzt von einem Kreise und einer krummen in einer Spitze D sich endigenden Seitenfläche heißt Kegel (conus).

e) Des Cylinders und Kegels Axe ist eine gerade Linie, welche bei jenem durch die Centra der Kreise, bei diesem durch das Centrum des Kreises und die Spitze geht.

f) Die Höhe des Prisma, der Walze, der Pyramide und des Kegels ist ein Perpendikel von einer zur andern Grundfläche bei den ersten, von der Spitze zur Grundfläche bei den letzten 2 Körpern. Es gibt senkrechte und schiefe Prismen, Walzen, Pyramiden und Kegel, je nachdem bei dem Prisma und der Walze eine Seite auf die Grundfläche senkrecht ist, oder nicht, und bei der Pyramide und dem Kegel die Axe senkrecht oder schief aufsteht.

g) Beim senkrechten Cylinder und Kegel ist die Axe die Höhe.

h) Ein viereckiger Körper (Fig 86.),, begrenzt von lauter Parallelogrammen, heißt Parallelepipedum. Sind die Parallelogramme Quadrate, so heißt er Würfel (cubus).

i) Ein allenthalben runder Körper, wovon jeder Punct seiner Oberfläche von einem innerhalb liegenden Puncte gleich weit absteht, heißt Kugel (globus, sphaera). Dieser innerhalb liegende Punct heißt Mittelpunct (centrum); eine gerade Linie von einem zum andern Puncte der Oberfläche durch den Mittelpunct heißt Axe, deren Endspuncte Pole

genannt werden. Die halbe Axe ist der **Radius**. Einen solchen Kreis der Kugel, dessen Durchmesser die Axe ist, nennt man einen **größten Kreis** (circ. max.).

§. 109.

Lehrsatz (Fig. 82.):

Wenn ein Prisma zur Grundfläche parallel geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche congruent.

Beweis:

Wegen des Parallelismus aus der Voraussetzung und dem Begriffe des Prisma sind alle Winkel und Seiten der Durchschnittsfigur jenen der Grundfläche gleich. Da beide Figuren auch gleichviele Seiten haben, so sind sie congruent (§. 23.)

§. 110.

Lehrsatz (Fig. 84.):

Wenn man eine Pyramide zur Grundfläche parallel schneidet, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche ähnlich.

Beweis:

Es sind gleich viele Seiten vorhanden; wegen des vorausgesetzten Parallelismus von ac, AC ꝛc. sind die Winkel der Ordnung nach gleich, und die Seitenstücke der Dreiecke proportionirt: folglich (§. 23.) sind die genannten Figuren ähnlich.

§. 111.

Erklärung:

Der zwischen der Grundfläche und der mit ihr parallelen Durchschnittsfigur enthaltene Theil der Pyramide und des Kegels heißt eine **abgekürzte**

Pyramide, ein abgekürzter Kegel (pyr. truncata, con. truncatus).

§. 112.

Lehrsatz:

Die Walze ist ein unendlicheckiges Prisma, und der Kegel eine unendlicheckige Pyramide.

Beweis:

Der Kreis ist ein reguläres Unendlicheck (§. 102., Zus. IV.). Also wird die Seitenfläche des Cylinders ein Inbegriff von gleichen unendlich vielen und ungemein kleinen Parallelogrammen, und jene des Kegels ein Inbegriff von gleichen unendlich vielen und ebenfalls ungemein kleinen Dreiecken, wo man die Parallelogramme und Dreiecke ohne erhebliche Fehler für Rundung oder Krümmung gelten lassen darf.

Zusatz: Was von einem dieser zwei Körper gilt, gilt nun auch von dem andern.

§. 113.

Erklärung:

Ein Würfel, dessen Länge, dessen Breite und dessen Höhe 1 Fuß, 1 Zoll ꝛc. beträgt, heißt Cubikfuß, Cubikzoll ꝛc. (|3|', |3|'').

Anmerkung: Auch hier gilt noch die Eintheilung in das Decimal- und Duodecimalmaß.

§. 114.

Aufgabe: Den Cubikinhalt eines Prisma zu finden.

Auflösung:

Man messe die Länge und Breite der Grundfläche, dann die Höhe, und multipliciere diese 3 Zahlen.

Beweis:

Aehnliches wird durch Aehnliches gemessen (§. 91.

a.). Man lege daher den Cubikfuß 2c. (§. 113.) in Fig. 87. an FH, HG und HD so oft neben und auf sich hin, als möglich ist; z. B. an FH 3mal, an HG 2mal und an HD 5mal. Man erhält am Boden 6 Cubikfuß, die man 5mal über einander legen kann; mithin im Ganzen 30 Cubikfuß. Weil Dreiecke 2c. Vierecken gleich sein können, so gilt dieses Verfahren auch bei andern, als viereckigen Prismen.

I. Zusatz: Wenn das Product der Länge und Breite der Grundfläche zweier Prismen, und wenn die Höhe der 2 Prismen auch gleich ist, so haben beide Prismen gleichen Inhalt.

II. Zusatz: Der Cubikinhalt der Walze (§. 112.) ist somit gleich $R^2\pi \cdot A$, d. h. man muß die Grundfläche $R^2\pi$ (§. 104.) mit der Höhe A multiplicieren.

III. Zusatz: (Fig. 88.). Der Cubikinhalt des cylindrischen Ringes ist $= (R^2 - r^2)\,\pi \cdot A$ (§. 104., Zus. IV.).

IV. Zusatz: Der Cubikinhalt eines Würfels ist $= A^3$, wenn A dessen Seite bezeichnet (§. 108., h).

V. Zusatz: Man kann den Würfel verdoppeln. Wenn man nämlich $A^3 = 2a^3$ setzt, so ist $\sqrt[3]{A^3} = \sqrt[3]{(2a^3)}$, d. i. $A = a\sqrt[3]{2} = a \times 1{,}26$.

Anmerkung: Die Arithmetik lehrt die Verwandlung und Reduction des Cubikmaßes; z. B. wie viel Dd. $\boxed{3}$'' geben 43 Dc. $\boxed{3}$''? Man setze an:

```
1000        1728        43, oder:
 125         216        43;

             216
              43
            ----
             648
             864
      ------------
:125 | 9288 | 74 38/125 Dd. [3]''.
     | 875  |
      ------
        538
        500
        ---
         38
```

§. 115.

Lehrsatz:

Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

Beweis:

Wenn die Grundflächen gleich sind, so sind die an gleichen Höhentheilen angebrachten parallelen Durchschnitte auch gleich; die viereckige Grundfläche ist ähnlich dem viereckigen Durchschnitte, und die zeckige Grundfläche dem zeckigen Durchschnitte (§. 110.). Wenn die Durchschnitte unendlich nahe bei den Grundflächen lägen, mithin von diesen unendlich wenig verschieden wären, so verhielten sich die vier Flächen geometrisch, so daß die Durchschnitte als Hinterglieder gleich sein würden, da die Grundflächen als Vorderglieder auch gleich sind. Da auch die Höhen gleich sind, und dieses bei jedem Puncte derselben der Fall ist, so ist der Pyramiden Inhalt gleich, und zwar jetzt wegen der so erhaltenen unendlich kleinen der Ordnung nach gleichen Prismen (§. 114. Zus. I.).

§. 116.

Lehrsatz (Fig. 89.):

Die dreieckige Pyramide, welche mit einem dreieckigen Prisma dieselbe Grundfläche und Höhe hat, ist der dritte Theil dieses Prisma.

Beweis:

Das dreieckige Prisma enthält die drei dreieckigen Pyramiden ABCE, ACFE und DEFA. Nimmt man in der ersten Pyramide das △ BCE, in der zweiten △ CFE als Grundflächen an, so ist A ihre gemeinschaftliche Spitze. Da nun gleiche Grundflächen (§. 51.) und gleiche Höhen da sind, so ist pyr. ABCE = pyr. ACFE (§. 115.); ferner: nimmt man

in pyr. ACFE und pyr. DEFA das △ ACF und das △ ADF als Grundflächen, so ist E die gemeinsame Spitze, und diese Pyramiden sind auch gleich.

I. Zusatz: Jede Pyramide ist der dritte Theil des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe (§. 114. Zus. I. und §. 115.).

II. Zusatz: Den Inhalt der Pyramide findet man, wenn man Länge und Breite der Grundfläche, dann die Höhe mißt, und das Product dieser Zahlen mit 3 theilt.

III. Zusatz: Der Inhalt des Kegels (§. 112.) ist $= \frac{1}{3} R^2\pi . A$, d. i. man multipliciert die Grundfläche $R^2\pi$ mit $\frac{1}{3}$ A oder $\frac{1}{3}$ Höhe.

§. 117.

Aufgabe (Fig. 90.):

Den Cubikinhalt des abgekürzten Kegels aus den Radien und dessen Höhe zu finden.

Auflösung:

Der Cubikinhalt des con. detr. $= \frac{1}{3} R^2\pi A - \frac{1}{3} r^2\pi a$. Man bezeichne jetzt den Radius der untern Grundfläche mit R, der obern mit r, die Höhe des ganzen Kegels mit A, des obern mit a, des abgestumpften mit d. Man ziehe mit CG bei D die Parallele BD (§. 47.), dann ist △ ACG ∽ △ ABD (§. 78.), und es verhält sich nun AB : BD = AC : CG (§. 75.), d. h. AC — BC : BD = AC : CE + EG. Weil BD = CE und DE = BC (§. 49.), so wird das Verhältniß $R - r : d = R : d + a$ oder A, und $d + a = \frac{dR}{R - r}$; $a = \frac{dR}{R - r} - d$ $= \frac{dR}{R - r} - \frac{(R - r)d}{R - r} = \frac{dR - dR + rd}{R - r} = \frac{rd}{R - r}$; es ist also $\frac{1}{3} R^2\pi A - \frac{1}{3} r^2\pi a =$ con. detr.

$= \frac{1}{3}$

$$=\tfrac{1}{3}R^2\pi\left(\frac{dR}{R-r}\right)-\tfrac{1}{3}r^2\pi\left(\frac{dr}{R-r}\right)=\tfrac{1}{3}d\pi\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right)$$

oder nach wirklicher Division $= \tfrac{1}{3}d\pi(R^2 + Rr + r^2)$.

Zusatz: Die abgekürzte Pyramide (§. 112.) ist nun, wenn d ihre Höhe, und b, B ihre Grundflächen bezeichnet, $= \tfrac{1}{3}d(B + \sqrt{Bb} + b)$.

Beispiel:

Es sei $d = 1'\ 7''$ b. Dd., $R = 1',5''$ und $r = 1'\ 2,5''$; es wird:

$$R^2 = 17^2 = 289,00$$
$$r^2 = (29/2)^2 = 210,25$$
$$Rr = 17 \times 29/2 = 246,50$$

$$R^2 + Rr + r^2 = 745,75$$

$$\tfrac{1}{3}\pi = 1,04719755$$
$$\times\ 745,75$$

```
                523598775
               733038285
              523598775
             418879020
            733038285
           ----------------
           780,9475729125
     d =          × 19
     ---------------------
          70285231562125
          7809475729125
     ---------------------
     14838,0038853375 b. Dd. |3|".
```

Anmerkung: Der Münchner Schäffel zu 6 Metzen hat nach den Angaben dieses Beispieles etwas zu 14838 baier. Duod. Cub. Zollen. Nimmt man 43 b. Dec. Cub. Zoll oder $74\frac{38}{125}$ b. Dd. C. Zoll (§. 114. Anmerk.) für die baier. Maß an, so hält ein baier. Schäffel von 1768 gegen 200 b. Maß.

§. 118.

Lehrsatz (Fig. 91.):

Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders von einerlei Höhe und Durchmesser mit der Kugel.

Beweis:

Man stelle sich vor, daß das Quadrat ACDB sich um die Seite AC bewege; es entsteht ein Cylinder. Weil das △ ABC rechtwinklig ist, und dieses zugleich mit um AC herumgeht, so entsteht ein Kegel. Beim Umdrehen um AC macht der Viertelskreis ACDmA eine Halbkugel. Diese drei Körper haben gleiche Höhe. Man kann nun bei gleicher Dicke der Stücke aus einem Körper nicht mehr Stücke schneiden, als aus dem andern. Man schneide in gleichen Theilen von der Höhe Cylinder, Kegel und Kugel parallel zu CD, und unendlich nahe bei einander. Weil bei der Kugel solche undenkbar nahe beisammen liegende Schnitte die Bögen der Kugel zu geraden Linien machen, so kann man sich die Halbkugel in lauter unendlich kleine Cylinder von derselben Höhe getheilt vorstellen, fast eben so dieses beim Cylinder und Kegel. Wenn EH ein solcher Durchschnitt ist, so ziehe man CG; CG = CD als Radius, und CD = EH, also CG = EH; dann $CG^q = EH^q$. Wegen des Parallelismus von CD, EH verhält sich CE : EF = CA : AB (§. 75. Zus.), und da CA = AB ist, so ist CE = EF, dann $CE^q = EF^q$. Indem DCA = 90°, so ist auch CEH = 90° (§. 45. b.). Es ist jetzt $CG^q = CE^q + EG^q$ (§. 57.), d. i. $EH^q = EF^q + EG^q$ (Sieh §. 57. Anmerk., und §. 84. Zus. II.). Da sich Cylinder von einerlei Höhe, wie die Quadrate der Halbmesser verhalten, indem Cyl : cyl = $R^2\pi . A : r^2\pi . A$, so muß der Cylinder über EH so groß sein, als der Cylinder über EG und EF, d. h. ein Stück der Halbkugel und ein Stück des Kegels sind zusammen ein Stück des Cylinders, der eben diese Dicke und CD als Halbmesser hat. Man mag nun die Körper an jedem Puncte der Höhe betrachten, so ist das letztere überall wahr; folglich muß auch die ganze Kugel mit dem Kegel dem Cylinder

gleich sein. Somit, wenn sph. die Kugel, con. den Kegel und cyl. die Walze bezeichnet, ist cyl. = sph. + con, und sph. = cyl. — con. Weil con. = $\frac{1}{3}$ cyl. (§. 114. Zus. II. und §. 116. Zus. III.), so wird sph. = cyl. — $\frac{1}{3}$ cyl. = $\frac{2}{3}$ cyl.

Zusatz: Unter den Bedingungen dieses §. verhält sich: con, sph., cyl. = $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 = 1, 2, 3.

§. 119.

Aufgabe: Den körperlichen Inhalt der Kugel zu finden.

Auflösung:

Man suche den Inhalt eines Cylinders, der mit dem Durchmesser der Kugel einerlei Höhe und Durchmesser hat, und nehme $\frac{2}{3}$ hievon. Es ist cyl. = $r^2\pi$. A (§. 114. Zus. II.); setzt man nun A (Höhe) = 2r, so ist cyl. = $2r^3\pi$ wovon $\frac{2}{3}$, oder $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}.(\frac{1}{2}d)^3\pi = \frac{4}{3}.\frac{1}{8}d^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$ der verlangte Cubikinhalt der Kugel ist.

§. 120.

Aufgabe: Die Oberfläche der Kugel zu berechnen.

Auflösung:

Betrachtet man die Kugel als aus lauter kleinen Pyramiden bestehend mit der gemeinschaftlichen Höhe r = Radius der Kugel, deren Basen unendlich kleine Flächenstücke der Krümmung der Kugel sind, welche zusammen die Oberfläche ausmachen, so ist sph. = superficies $\times \frac{1}{3}r$ (§. 116. Zus. II.). Mithin ist sup. $\times \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$ (§. 119.) und sup. = $\frac{4}{3}r^3\pi : \frac{1}{3}r = 4r^2\pi$.

§. 121.

Erklärungen:

a) Ein körperliches Eck (angulus solidus) besteht aus 3 oder mehreren verschiedenen ebenen

Winkeln, die in einer Spitze schief zusammenstoßen; z. B. eine Zimmerecke. Aus dieser Bestimmung geht hervor, daß die Summe der ebenen Winkel kleiner sei, als 360°.

b) Regulär ist ein Körper, der in lauter regelmäßige gleiche Flächen von einer Art, die gleiche Ecken machen, eingeschlossen ist; sonst ist er irregulär.

§. 122.

Erklärungen:

a) Ein Körper, welcher in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen ist, heißt Würfel (hexaedrum).

b) Ein Körper, der in 4 congruente gleichseitige Dreiecke eingeschlossen ist, heißt Tetraedrum.

c) Ein Körper, eingeschlossen in 8 congruente gleichseitige Dreiecke, heißt Oktaedrum.

d) Ein Körper, eingeschlossen in 20 congruente gleichseitige Dreiecke, heißt Ikosaedrum.

e) Ein Körper, in 12 congruente Fünfecke eingeschlossen, heißt Dodekaedrum.

Zusatz: Der Winkel des Quadrates beträgt 90°. Drei solche, hier ein körperliches Eck bildende Winkel halten 270°. Vier gäben 360°. Der gleichseitige Dreieckswinkel hat 60° (§. 52. Zus. V.); drei solche ein körperliches Eck des Tetraedrums bildende Winkel haben 180°; vier solche ein körperliches Eck beim Oktaedrum bildende Winkel haben 240°; fünf solche ein körperliches Eck des Ikosaedrums bildende Winkel haben 300°; sechs solche hätten 360°. Der reguläre Fünfeckswinkel hat 108° (§. 54. Zus.) Drei solche ein körperliches Eck des Dodekaedrums einschließende Winkel haben 324°. Vier solche Winkel haben mehr als 360°. Daher gibt es nur die genannten 5 regulären Körper (§. 121. a.).

Anmerkung: Man pflegt auf einer Ebene, z. B. auf Pappe und Charten die Seitenflächen geometrischer Körper zu zeichnen, so daß sie gehörig zusammengebogen den Körper einschließen. Diese Seitenflächen werden Netze genannt.

§. 123.

Aufgabe (Fig. 92.): **Den körperlichen Inhalt des Fasses (dolium) zu finden.**

Auflösung:

Wenn AF = CD = d, BE = D, AM = MD = ½AD = ϑ, so betrachte man das Faß als zwei abgekürzte Kegel, deren Durchmesser die Spundtiefe BE und die Länge der Faßböden FA = CD, und deren Höhe die halbe Faßlänge oder ½AD ist. Im Falle AF nicht gleich CD ist, so setze man $\frac{AF + CD}{2}$ = d. Laut §. 117. entsteht für das Faß dem Inhalte nach folgende Formel:

$$\begin{aligned} Dol. &= 2 \cdot \tfrac{1}{3}\vartheta\pi\left((\tfrac{1}{2}BE)^2 + \tfrac{1}{2}BE \cdot \tfrac{1}{2}AF + (\tfrac{1}{2}AF)^2\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\,\vartheta\pi\left((\tfrac{1}{2}D)^2 + \tfrac{1}{2}D \cdot \tfrac{1}{2}d + (\tfrac{1}{2}d)^2\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\,\vartheta\pi(\tfrac{1}{4}D^2 + \tfrac{1}{4}Dd + \tfrac{1}{4}d^2) \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\vartheta\pi(D^2 + Dd + d^2) \\ &= \tfrac{1}{6}\,\vartheta\pi(D^2 + Dd + d^2). \end{aligned}$$

Es ist $\frac{1}{6}\pi = 0{,}52359877\ldots$

Beispiel:

Es sei die Faßlänge AD = 2ϑ = 43, die Spundtiefe BE = D = 30, der Durchmesser der Faßböden AF = CD = d = 24 baier. Dec. Zoll. Wie viele baier. Maß hält das Faß?

$$\vartheta = \tfrac{43}{2} = 21\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{6}\pi = \quad = 0{,}52359877\ldots$$

$$\begin{aligned} D = 30,\ D^2 &= 900 \\ d = 24,\ d^2 &= 576 \\ Dd &= 720 \\ \hline D^2 + d^2 + Dd &= 2196; \end{aligned}$$

$$2196 \times {}^{43}/_{2} = 1098$$

```
      1098
     × 43
     ----
      3294
     4392
     -----
     47214;
```

```
      0,52359877 ...
           × 47214
     --------------
         209439508
         52359877
       104719754
      366519139
     209439508
     -----------------
     24721,19232678 Dec. Cub. Zoll.
```

Da die baier. Maß 43 Dec. C. Zoll hält, so gibt

```
; 43 | 24721 | 574 39/43 Ms. = beinahe 9 7/12 Eimer
     | 215   |                         (à 60 Ms.).
     --------
        322
        301
       -----
        211
        172
       -----
         39
       -----
         43
```

§. 124.

Geschichtliche Anmerkungen zu diesem Abschnitte.

Der Zus. V. des §. 114. enthält das delphische Problem. Als nämlich in Griechenland eine Pest war, schickte man nach Delphi, um sich bei dem Orakel des Apollo über die Mittel gegen dieselbe zu befragen. Apollo befahl, einen Altar, der ein Würfel war, zu verdoppeln. Diese Aufgabe der Priester konnten die Griechen nicht sogleich geometrisch lösen.

Den Lehrsatz §. 118. erfand Archimedes (de sphaera et cylindro). Er schätzte diese Erfindung so hoch, daß er verlangte, man sollte auf sein Grabmal einen Cylinder mit einer von diesem umschrie-

benen Kugel setzen. Und in der That zeigt auch dieser Satz den großen Scharfsinn des Archimedes!

Nikomedes, ein griechischer Geometer im 2ten Jahrhunderte vor Chr. Geburt, erfand die Conchoid oder Muschellinie, welche wohl am beßten zur Ausrechnung des Inhaltes der Fässer dient. Lambert nahm an, daß gleichtheilige Fässer aus 2 Cylindern bestehen, welche die Faßlänge zur gemeinschaftlichen Höhe, und zu Diametern die Diameter der gleichen Faßböden und die Spundtiefe haben. Dieses stimmt mit der auch wahren Lehre von der Ellipsis überein, und er erhielt folgende bequeme Formel (Fig. 92.).

Erster Cylinder $= AD\,.\,(\tfrac{1}{2}AF)^2\pi$ (§. 114. Zus. II.)
$= AD\,.\,\tfrac{1}{4}AF^2\pi$ (§. 104.)
$= 2\vartheta\,.\,\tfrac{1}{4}d^2\pi = \tfrac{1}{2}\vartheta\,.\,d^2\pi.$

Zweiter Cyl. $= AD\,.\,(\tfrac{1}{2}BE)^2\pi$
$= AD\,.\,\tfrac{1}{4}BE^2\pi$
$= 2\vartheta\,.\,\tfrac{1}{4}D^2\pi = \tfrac{1}{2}\vartheta\,.\,D^2\pi.$

Den zweiten Cylinder nahm er doppelt $= \vartheta\,.\,D^2\pi$, wozu er den ersten zählte, wo er dann die Summe mit 3 dividirte; also wird

$$\text{Dolium} = \frac{\vartheta\,.\,D^2\pi + \tfrac{1}{2}\vartheta\,.\,d^2\pi}{3}.$$
$$= \tfrac{1}{3}\vartheta\pi(D^2 + \tfrac{1}{2}d^2).$$
$$= \tfrac{1}{6}\vartheta\pi(2D^2 + d^2).$$

Berechnet man obiges Beispiel (§. 123.) nach dieser Formel, so hält das Faß 10 Eim., 22 Ms.

Prof. Müller in Nürnberg übergab dem Publicum Tabellen zur schnellen Faßausrechnung.

VII. Abschnitt.

Von der practischen Geometrie.

§. 125.

Erklärung:

Die zur practischen Geometrie nöthigen und im mündlichen Unterrichte vorzuzeigenden und zu erklärenden Werkzeuge oder Instrumente sind

a) Meßketten, Meßschnüre, Meßstangen,
b) Absteckstäbe, Zeichenstäbe, Meßfahnen, Senkel.
c) ein Meßtisch (mensula praetoriana) mit dem Diopterlineal, der Setzwage,
d) ein Astrolab,
e) Zirkel, Bleistifte, Transporteurs, Maßstäbe.

§. 126.

Aufgabe (Fig. 93.): Mit der Meßkette oder Schnur einen Winkel auf dem Felde an jeden Punct einer gegebenen geraden Linie zu tragen.

Auflösung:

Man stecke in A, D, C Fahnen ein; dann messe man AD, und trage diese Länge an ad, wo man bei a, d auch Fahnen einstecke. Hierauf messe man CD und mache aus d damit den Bogen op; mit AC, das man auch maß, beschreibe man aus a den Bogen lm; zum Durchschnittspuncte c ziehe man aus a, ac und angulus CAD = ang. cad. (§. 31.).

§. 127.

Aufgabe (Fig. 94.): Mit der Meßkette oder Schnur auf dem Felde einen Winkel zu halbieren.

Auflösung:

Man messe, nachdem man in C, A Fahnen ge-

steckt hat, CA, und trage CA auf AD, so daß CA = AD, und stecke in D eine Fahne. Nun nehme man eine Länge der Kette oder Schnur, gleich CB, und beschreibe mit CB aus C, D die sich in B durchschneidenden Bögen. Steckt man in B eine Fahne, so ist CAB = DAB (§. 37.).

§. 128.

Aufgabe (Fig. 95.): Mittels der Kette oder Schnur auf dem Felde zu AB eine Parallele in D zu ziehen.

Auflösung:

Man stecke in A und B Fahnen, dann solche ober- und unterhalb AB in C, D. Endlich trage man den Winkel o nach D (§. 126., 47.).

§. 129.

Aufgabe (Fig. 96.): Mittels der Kette oder Schnur auf dem Felde aus A der Linie CD einen Perpendikel zu machen.

Auflösung:

Man nehme AD = 3′, DF = 5′ und AF = 4′, und setze diese Längen in ein Dreieck zusammen, das rechtwinklig sein wird, weil $5^2 = 3^2 + 4^2$ ist (§. 84., Zus. II.)

§. 130.

Erklärungen:

a) **Ein Feld aufnehmen** oder **in den Grund legen** heißt, eine Figur auf dem Papier im Kleinen so verzeichnen, daß sie jener auf dem Felde ähnlich ist.

b) **Verjüngen** heißt, eine kleine Linie oder Figur einer größern ähnlich machen.

§. 131.

Aufgabe (Fig. 97.): Einen verjüngten Maßstab zu verfertigen.

Auflösung:

Man trage auf eine unbestimmte Linie 10 beliebige gleiche Theile. Ein solcher Theil sei Ab, daß also AB = 10 Ab. Die Linie AB trage man so oft auf die Linie AD, als es angeht. Man thut wohl, AB auf AD 10 mal aufzutragen. Auf den Endspuncten A, B, C, D errichte man Perpendikel von unbestimmter, aber gleicher Länge. Auf AF = BG kommen willkürliche 10 gleiche Theile. Dann ziehe man durch die Theilungspuncte c, d, e, f ꝛc. Parallelen mit AD. Die Linie FG wird in solche 10 gleiche Theile getheilt, die den Theilen von AB gleich sind. Endlich ziehe man die Querlinien hB bis Fb. Ist nun AB 1 Fuß, so wird Ab 1 Zoll, mn 9 Linien u. s. w.

Beweis:

Wenn FG = AB = 1 Fuß, ist hG = $^1/_{10}$ Fuß = 1 Zoll. Wegen des Parallelismus verhält sich Bm : mn = BG : Gh (§. 75.), d. h., weil Bm : BG = mn : hG, so $^9/_{10}$: $^{10}/_{10}$ = mn' : $^1/_{10}$, und mn = ($^9/_{10}$ × $^1/_{10}$) : $^{10}/_{10}$ = $^9/_{100}$. Hat der Fuß 10 Zoll = 100 Linien, so sind $^9/_{100}$ Fuß = 9 Linien.

§. 132.

Aufgabe (Fig. 98.): Die Entfernung zweier Puncte A, B zu messen, wenn man von einem Puncte C nach A und B sehen und gehen kann.

I. Auflösung:

Man setze in C eine Fahne, und messe CA, CB. Dann trage man CA rückwärts in der Verlänge-

rung bis F, und ebenso CB bis G auf. Man setze in F, G Fahnen. Nun wird GF = AB sein.

Beweis:

$$AC = CF$$
$$CB = CG$$
$$C = C \text{ (§. 41.)}$$

Also ist $\triangle ACB \cong \triangle GCF$ (§. 24.), und
$AB = GF$ (§. 28.).

II. Auflösung:

Man stecke in C eine Fahne, und ziehe mit AB bei g eine Parallele (§. 128.); dann stecke man bei g und f Fahnen ein. Jetzt messe man Ag, gC, gf, und es verhält sich Cg : gf = CA : AB (§. 78.).

$$\text{Also } AB = \frac{CA \times gf}{Cg}.$$

§. 133.

Aufgabe (Fig. 99.): Eine Weite AB zu messen, wenn man von einem Puncte C nach A, B sehen, aber nur nach A gehen kann.

I. Auflösung:

Man stecke bei C eine Fahne ein, und messe CA. Die Länge CA trage man rückwärts verlängert als CF auf, und stecke in F eine Fahne. Jetzt trage man den Winkel A nach F (§. 126.), so daß FG mit AB parallel ist (§. 44., c.), und stecke in G eine Fahne. Endlich stecke man in g der Linie GF und der verlängerten Linie BC eine Fahne, und gF = AB.

Beweis:

$$AC = CF$$
$$C = C$$
$$A = F$$

$\triangle ACB \cong \triangle gCF$ (§. 25.),
$gF = AB$ (§. 28.).

II. Auflösung:

Man ziehe bei h zu AB eine Parallele hf (§. 128.), und stecke Fahnen in h, f. Hat man Ah, hC und hf gemessen, so verhält sich wieder (§. 78.) Ch : hf = CA : AB, und

$$AB = \frac{hf \times CA}{Ch}.$$

§. 134.

Aufgabe (Fig. 100.): Eine Weite AB, zu deren Puncten A, B man von C nur sehen, nicht aber gehen kann, mit dem Meßtische zu messen.

Auflösung:

Man nehme die beliebige Standlinie CD, und stecke bei E einen Stab in der Richtung BD, und einen bei F in der Richtung AD. Auch bei D sei ein Stab. Ueber C bringe man den Meßtisch LM, richte denselben mittels der Setzwage (Libelle) und der Schrauben horizontal, und bestimme durch den Senkel aus c den Perpendikel cC. Aus c visiere man mit der Diopter nach A, F, B, E, D und ziehe mit dem Diopterlineale und dem Bleistifte die Visierlinien $c\alpha$, $c\varphi$, $c\beta$, $c\varepsilon$, $c\delta$. Jetzt messe man CD, CE, CF, und trage mittels des verjüngten Maßstabes diese Längen auf den treffenden Visierlinien auf, so daß man auf dem Meßtische die entsprechenden Längen cd, ce, cf habe. Man ziehe de bis b, also db, dann df bis a, oder da, und ab ist im verjüngten Maße so groß, als AB.

Anmerkung: Der Beweis ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke und den bei diesen vorkommenden Verhältnissen der Seiten.

§. 135.

Aufgabe (Fig. 101.): Die senkrechte Höhe AB zu messen, wenn man A aus C sehen, und B erreichen kann.

Auflösung:

Man nehme einen Stab ED von so bestimmter Länge, daß, wenn man ihn etwa in D senkrecht einsetzt, das Auge in C die 3 Puncte C, E, A in einer Linie erblickt, und messe CD, dann DB. Hat man nun den Stab ED bei D senkrecht mittels eines Senkels eingesetzt, so ist ED mit AB parallel (§. 46., Zus. II.), und die Dreiecke ABC und EDC sind ähnlich (§. 78.). Daher verhält sich CD : DE = CB : AB, und

$$AB = \frac{DE \,.\, CB}{CD}.$$

Anmerkung: Man kann denselben Stab ED durch Vor- und Rückwärtsbewegung auf der Linie BC endlich wirklich in einem Puncte D dieser Linie festgesetzt haben, so daß C, E, A in einer Linie AC liegen.

§. 136.

Aufgabe (Fig. 102.): Das Feld ABCDEA in den Grund zu legen (§. 130.).

Auflösung:

Man setze den Meßtisch gehörig über A, und messe AE = ae. Dann ziehe man zu C, D die Visierlinien ab, ad. Jetzt messe man ringsum ED, DC, CB, und trage diese Längen auf dem Meßtische auf, aus e nämlich ed = ED, dann folgen db = DC, bl = CB; so wird sich la = BA selbst bestimmen, und dieß kann zur Probe nachgemessen werden.

Anmerkung: 1) Man bestimme in dieser Aufgabe die Winkel auch, und trage sie auf den Meßtisch, weil sonst die Dreiecke dem Augenscheine nach zu bestimmen wären. Vergl. §. 34.

2) Der Beweis geht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hervor.

§. 137.

Geschichtliche Anmerkungen zu diesem Abschnitte:

Der Meßtisch wurde von Johann Prätorius erfunden. Dieser starb im Jahr 1616 zu Altdorf als Professor der Mathematik, und von ihm heißt jener lateinisch: mensula praetoriana.

Die vorzüglichsten practischen Geometer waren: Schwenter, Penther, Mayer (zu Mannheim), Ehrenberger, Kästner u. a.

Sieh auch: Baculometrie, und Tänzels ökonomisch-politische Arithmetik.

Trigonometrie.

I. Abschnitt.
Vorläufige Kenntnisse.

§. 138.

Erklärungen:

a) Die Trigonometrie (Trigonometria) lehrt aus so vielen gegebenen Seiten und Winkeln, als ein Dreieck bestimmen, wenn man solche in Zahlen gibt, die andern unbekannten Seiten und Winkel durch Rechnung finden.

b) Die Trigonometrie ist eben (plana), wenn sie von der Berechnung geradliniger Dreiecke handelt; sphärisch (sphaerica), wenn sie die Berechnung solcher Dreiecke lehrt, deren Seiten Bögen von größten (d. h. durch der Kugel Mittelpunct laufenden) Kugelkreisen sind.

Zusatz: Unter den zur Berechnung der geradlinigen Dreiecke gegebenen 3 Stücken muß jedes Mal eine Seite sein, weil die Winkel allein unzählige ähnliche Dreiecke bestimmen (speciem trianguli).

Anmerkung: Hier wird nur die ebene Trigonometrie gelehrt.

§. 139.

Lehrsatz (Fig. 103.):

In jedem geradlinigen Dreiecke steht dem größern Winkel die größere Seite entgegen, d. h. wenn $BAC > C$, so $BC > BA$.

Beweis:

Da der Winkel $BAC > C$, so nehme man von BAC einen Theil $bAC = C$; also ist $Ab = Cb$

(§. 28., Zus. I.). Mithin ist Ab + bB = Cb + Bb oder: Ab + bB = BC. Weil Ab + Bb > AB (§. 22., Zus.), so ist BC > AB.

I. Zusatz: (Fig. 103.). Es ist BAC > C, wenn BC > BA; nämlich: wäre BAC = C, so wäre gegen die Annahme ein gleichschenkliges Dreieck vorhanden (§. 28., Zus. I.).

II. Zusatz: Man kann aber nicht schließen, daß die Winkel eines Dreieckes sich so verhalten, wie die gegenüberstehenden Seiten; denn (Fig. 104.) △ CAB sei rechtwinklig und, indem CA = AB, gleichschenklig, wo dann B = C (§. 27., Zus. I.). Da ferner A = 90°, so ist B + C = 90° (§. 52., Zus. I.), und B = C = 45°. Mithin verhält sich A : B = 90° : 45° = 2 : 1. Sollten sich nun die Winkel verhalten, wie die gegenüberstehenden Seiten, so müßte A : B = CB : CA = 2 : 1. Somit wäre CB = 2AC = 2AB = CA + AB. Folglich würde eine Dreiecksseite gegen §. 22., Zus. nicht kleiner sein, als die Summe der beiden anderen Seiten.

Anmerkung: Dem zufolge verhalten sich die Bögen der Kreislinie, die das Maß der Winkel sind, ebenfalls nicht, wie die gegenüberstehenden Seiten in den Dreiecken. Also kann man die Regel de tri nicht anwenden, um aus gegebenen Seiten und Winkeln das Unbekannte zu finden. Man mußte nun auf andere Linien sinnen, die sich statt der Winkel und Bögen gebrauchen lassen, indem sie doch mit den Seiten des Dreieckes in Proportion stehen. Das sind eben die trigonometrischen Linien, die jetzt erklärt werden.

§. 140.

Erklärungen (Fig. 105.)

a) Ein Perpendikel AD vom Endspuncte A des Radius CA auf den andern Radius CB heißt Sinus (sinus, sin.) des Winkels ACB oder des Bogens AB.

b) Das Stück DC des Radius heißt Cosinus (cosin.), das Stück DB des Radius Quersinus

(sinus

(sinus versus, sinv.) desselben Winkels und Bogens.

c) Errichtet man am Endspuncte B des Radius CB einen Perpendikel BF von solcher Länge, bis ihn der verlängerte Radius CA in F schneidet, so nennt man BF die Tangens (tg.) und CF die Secans (sec.) desselben Winkels und Bogens.

Zusatz: Da in Fig. 105. DC = Am (§. 49.), und der Winkel ACR das Complement zu ACB ist (§. 52., Zus. II.), so wird Am als Sinus des Complements ein Cosinus des Winkels ACB. Aehnlicher Art nun heißt man die Tangens FR und Secans CF des Complements die Cotangens (cotg.) und Cosecans (cosec.) des Winkels ACB.

§. 141.

Lehrsatz:

Die gleichnamigen trigonometrischen Linien gleicher Winkel in ungleichen Kreisen verhalten sich, wie die Radien der Kreise, d. h. (Fig. 106.) AD : ad = CB : CL.

Beweis:

Weil AD und ad als Sinus (§. 140., a; §. 46., Zus. II.) parallel sind, so verhält sich (§. 75.) im △ CAD, dessen Seite CA als Radius = CB ist, Ca : ad = CA : AD, oder Ca : CA = ad : AD. Weil als Radien Ca = CL, so ist auch CL : CB = ad : AD. Aehnlich könnte man den Beweis weiter hin erstrecken.

Zusatz: Nennt man den größern Radius R, den kleinern r, so ist Sin. C : sin. C = R : r u. s. w.

§. 142.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Der stumpfe Winkel BCM hat mit seinem Supplemente (§. 40., Zus.) ECM denselben Sinus MN.

Beweis:

Der Sinus eines Winkels ist ein Perpendikel von bestimmter Beschaffenheit (§. 140., a.). Nur MN ist offenbar ein Perpendikel dieser Art.

Zusatz: Der stumpfe Winkel ECA hat mit dem spitzigen Nebenwinkel (Supplement) ACB dieselbe Tangens FB.

§. 143.

Lehrsatz:

Der Sinus von 30° ist ($= \frac{1}{2} r$) der halbe Radius.

Beweis:

Da man den Radius sechsmal an der Peripherie herumtragen kann (§. 70., Zus. VI.), wo der Centriwinkel 60° hat, so kann man durch einen Perpendikel aus dem Mittelpuncte auf die Sehne diese und den Centriwinkel zu 2 Linien (Sinus) und Winkeln halbieren (§. 63., Zus. II.), wo nun ½ chord. = ½ r ist.

§. 144.

Lehrsatz:

Die Tangens von 45° ist ($= r$) der Radius.

Beweis:

In einem rechtwinkligen Dreiecke, wo ein spitziger Winkel 45° ist, ist auch der andere 45°; daher sind der Radius und die Tangens als gegenüberstehende Seiten einander gleich.

§. 145.

Lehrsatz:

Der Peripheriewinkel hat die halbe Sehne seines Bogens zum Sinus.

Beweis:

Der Peripheriewinkel hat den halben Bogen, worauf er steht, zum Maße (§. 68., Zus. 1.), und der doppelt so große Centriwinkel (§. 68.) den ganzen Bogen. Theilt man die Sehne des Centriwinkels durch einen Perpendikel aus demselben in 2 gleiche Theile, so entsteht die halbe Sehne als Sinus des halben Centri-, oder des ganzen Peripheriewinkels.

§. 146.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Für jeden Winkel oder Bogen C ist $\text{cosin. } C = \sqrt{r^2 - \text{sin. } C^2}$.

Beweis:

$DC^2 = AC^2 - AD^2$ (§. 34., Zus. II.), d. h. $(\text{cosin. } C)^2 = r^2 - (\text{sin. } C)^2$, und $\text{cosin. } C = \sqrt{r^2 - \text{sin. } C^2}$.

Da $DC = Am$, so gilt dieses auch beim stumpfen Winkel.

I. Zusatz (Fig. 107.): $\text{Cos.} 30^\circ = \sqrt{r^2 - (\text{sin.} 30^\circ)^2}$; da nun $(\text{sin. } 30^\circ)^2 = (\frac{1}{2} r)^2$ (§. 143.) $= \frac{1}{4} r^2$ ist, so wird $\text{cosin. } 30^\circ = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} r^2} = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{3} = \text{sin. } 60^\circ$.

II. Zusatz (Fig. 105.): Ist der cosin. C im ersten Kreisviertel (+), so ist derselbe im zweiten (—).

III. Zusatz: a) $\text{cosin. } 0^\circ = \sqrt{r^2 - (\text{Sin. } 0)^2} = r = \text{cosin. } 180^\circ = \text{cosin. } 360^\circ$.

b) $\text{cosin. } 90^\circ = \sqrt{r^2 - (r)^2} = 0 = \text{cosin. } 270^\circ$.

§. 147.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Für jeden Winkel oder Bogen C ist $\text{sin. v. } C = r - \text{cosin. } C$.

Beweis:

BD = CB − CD; d. h. $\sin. v. C = r - \text{cosin}. C$; ferner BN = BC + CN, also wieder $\sin. v. C = r + (-\text{cosin}. C)$ (§. 146., Zus. II.) $= r - \text{cosin}. C$.

§. 148.

Lehrsatz:

Für jeden Winkel oder Bogen C ist (Fig. 105.) $\sec. C = \sqrt{r^2 + tg. C^2}$.

Beweis:

$CF^2 = CB^2 + FB^2$ (§. 84., Zus. II.), d. i. $\sec. C^2 = r^2 + (tg. C)^2$, und $\sec. C = \sqrt{r^2 + tg. C^2}$.

Weil die Secans von der Tangens mitbestimmt wird, und der stumpfe Winkel mit dem spitzigen Nebenwinkel dieselbe Tangens hat (§. 142., Zus.), so gilt obige Formel auch für den stumpfen Winkel.

Zusatz: $\sec. 45^0 = \sqrt{r^2 + (tg. 45^0)^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$.

§. 149.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Für jeden Bogen oder Winkel C ist

$$tg. C = \frac{r . \sin. C}{\text{cosin}. C}.$$

Beweis:

DC : DA = BC : BF (§. 46., Zus. II., §. 75.); $\text{cosin}. C : \sin. C = r : tg. C$, und $tg. C = \frac{r . \sin. C}{\text{cosin}. C}$.

Diese Formel gilt auch für den stumpfen Winkel (§. 142.).

I. Zusatz: $\text{tg. } 0^0 = \text{tg. } 180^0 = \frac{r \cdot o}{r} = o$; $\text{tg. } 90^0 = \text{tg. } 270^0 = \frac{r \cdot r}{o} = \frac{r^2}{o} =$ unendlich groß.

II. Zusatz: Weil $\sec. C = \sqrt{r^2 + \text{tg. } C^2}$ (§. 148.), so wird durch Substitution $\sec. C$

$$= \sqrt{r^2 + (\text{tg. } C)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{r \cdot \sin. C}{\text{cosin. } C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2 \cdot \sin. C^2}{\text{cosin. } C^2}}$$

$$= \sqrt{r^2\left(1 + \frac{\sin. C^2}{\cos. C^2}\right)} = \sqrt{r^2\left(\frac{\cos. C^2}{\cos. C^2} + \frac{\sin. C^2}{\cos. C^2}\right)}$$

$$= \sqrt{r^2\left(\frac{\cos. C^2 + \sin. C^2}{\text{cosin. } C^2}\right)} = r\sqrt{\frac{\cos. C^2 + \sin. C^2}{\text{cosin. } C^2}}$$

$$= r\sqrt{\frac{r^2}{\text{cusin. } C^2}}$$ (siehe Fig. 105., und §. 84., Zus. II.)

$$= r \frac{r}{\sqrt{\text{cosin. } C^2}} = \frac{r^2}{\sqrt{\text{cosin. } C^2}} = \frac{r^2}{\text{cosin. } C}.$$

Da bei 0^0 und bei 180^0 der $\text{cosin. } C = r$, so ist $\sec. 0^0 = \sec. 180^0 = \frac{r^2}{r} = r$, und da bei 90^0 und 270^0 der $\text{cosin. } C = o$, so ist $\sec. 90^0 = \sec. 270^0 = \frac{r^2}{o} =$ unendlich groß.

§. 150.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Für jeden Winkel oder Bogen C ist

$$\text{cotg. } C = \frac{r \cdot \text{cosin. } C}{\sin. C}.$$

Beweis:

Cm oder AD : mA oder CD = CR : RF; sin. C : cosin. C = r : cotg. C;

$$\text{cotg. } C = \frac{r \cdot \text{cosin. } C}{\text{sin. } C}.$$

I. Zusatz: Weil $\text{tg. } C = \frac{r \cdot \text{sin. } C}{\text{cosin. } C}$ (§. 149.), so ist

$$\text{tg. } C : \text{cotg. } C = \frac{r \cdot \text{sin. } C}{\text{cosin. } C} : \frac{r \cdot \text{cosin. } C}{\text{sin. } C} = \frac{\text{sin. } C}{\text{cosin. } C} : \frac{\text{cosin. } C}{\text{sin. } C}.$$

Es ist aber $\frac{\text{sin. } C}{\text{cosin. } C} : \frac{\text{cosin. } C}{\text{sin. } C} = (\text{sin. } C)^2 : (\text{cosin. } C)^2$.

Daher verhalten sich Tangens und Cotangens, wie die Quadrate des Sinus und Cosinus.

II. Zusatz: Da bei C = 45° cosin. C = sin. C, so ist cotg. 45° = r.

§. 151.

Lehrsatz (Fig. 105.):

Für jeden Bogen oder Winkel C ist $\text{cosec. } C = \sqrt{r^2 + \text{cotg. } C^2}$.

Beweis:

$CF^2 = CR^2 + FR^2$, d. h.

$\text{cosec. } C^2 = r^2 + \text{cotg. } C^2$, und

$\text{cosec. } C = \sqrt{r^2 + \text{cotg. } C^2}$.

I. Zusatz: $\text{cosec. } C = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r \cdot \text{cosin. } C}{\text{sin. } C}\right)^2}$ (§. 150.).

$$= \sqrt{r^2 + \frac{r^2 . \text{cosin}. C^2}{\text{sin}. C^2}}$$

$$= \sqrt{r^2 \left(1 + \frac{\text{cosin}. C^2}{\text{sin}. C^2}\right)}$$

$$= r\sqrt{\frac{\text{sin}. C^2}{\text{sin}. C^2} + \frac{\text{cosin}. C^2}{\text{sin}. C^2}}$$

$$= r\sqrt{\left(\frac{\text{sin}. C^2 + \text{cosin}. C^2}{\text{sin}. C^2}\right)}$$

$$= r . \sqrt{\frac{r^2}{\text{sin}. C^2}} = r . \frac{r}{\text{sin}. C} = \frac{r^2}{\text{sin}. C}.$$

Es verhält sich nun

$\text{sec}. C : \text{cosec}. C = \frac{r^2}{\text{cosin}. C}$ (§. 149., Zus. II.) : $\frac{r^2}{\text{sin}. C} = \text{sin}. C : \text{cosin}. C.$

II. Zusatz (Fig. 107.): $\text{cosec}. 30^0 = \frac{r^2}{r : \frac{r}{2}} = 2r.$

Es ist $\text{cotg}. 30^0 = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$, und $\text{tg}. 30^0 = \frac{r . \frac{1}{2} r}{\frac{1}{2} r . \sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$

Daher verhält sich $\text{tg}. 30^0 : \text{cotg}. 30^0 = \frac{r}{\sqrt{3}} : r\sqrt{3} = r . \frac{1}{\sqrt{3}} : r . \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 : 3.$ Ferner verhält sich $(\text{sin}. 30)^2 : (\text{cosin}. 30)^2 = (\frac{1}{2} r)^2 : (\frac{1}{2} r \sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} r^2 : \frac{1}{4} r^2 . 3 = 1 : 3.$ Mithin $\text{tg}. 30^0 : \text{cotg}. 30^0 = (\text{sin}. 30^0)^2 : (\text{cosin}. 30^0)^2.$ Sieh §. 150., Zus. I.

§. 152.

Aufgabe (Fig. 105.):

Für $r = 10'000.000$ den Sinus von 45° zu finden.

Auflösung:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$, d. i. $r^2 = AD^2 + DC^2 = 2\ AD^2$, weil $AD = DC$; somit ist $r^2 = 2\ (\sin. C^2)$; $\frac{r^2}{2} = (\sin. C)^2$; $\frac{r}{\sqrt{2}} = \sin. C = \sin. 45^o$;

$$\sin. 45^o = \frac{10'000000}{:1,4142136};$$

```
:1,4142136|10'0000000|7071067.
          | 98994952 |
          ------------
             100504800
              98994952
             ---------
              15098480
              14142136
             ---------
                95634400
                84852816
               ---------
               107315840
```

Die Charakteristik (das Kennziffer) des Logarithmus dieser Zahl ist 6.

Zusatz: Sollte man für einen Radius 10.000.000.000 den Sinus von 30° angeben, so wäre derselbe $= 5000.000.000$ (§. 143.). Der Logarithmus dieser Zahl ist $= 9,6989700$. Für $r = 10'000000$ wäre der Sinus von $30^o = 5000000$, und der Logarithmus dieser Zahl $= 6,6989700$. Aus diesem sieht man, daß man die Charakteristik um 3 vermindern müße, um aus einem Radius 10.000.000.000 für $r = 10'000000$ die trigonometrischen Linien zu bestimmen. In vielen vorhandenen trigonometrischen Tabellen wurde $r = 10000000000$ angenommen, so daß der Logarithmus des Radius $= 10 = 10,0000000$ ist.

Will man in diesen Tabellen die genannten Linien für den Radius 1 bestimmen, so muß man 10 Decimalstellen in der gefundenen Längenzahl von der rechten zur linken Hand abschneiden.

Anmerkung: Da in Vega's logarithmisch-trigonometrischem Handbuche, das in jedes Mathematikverständigen Hand sein soll, vorn der vollständige Gebrauch desselben erklärt wird, so ist es hier überflüssig, davon zu reden, und man verweiset lediglich dahin.

§. 153.

Geschichtliche Anmerkungen zu diesem Abschnitte:

Der Ausdruck Sinus (sinus) soll nach Montucla (histoire des mathematiques) von dem abgekürzten semissis inscriptae (s . ins.) herkommen.

Man hat durch mühsame Rechnung gesucht, wie viele Theile des Radius r (in den Tabellen) auf die trigonometrischen Linien der spitzigen Winkel (sin., cosin. 2c.) fallen. Für stumpfe Winkel hatte man dieses nicht nöthig (§. 142.). Die Infinitesimalrechnung aber gibt Lehren, wornach man die trigonometrischen Tabellen schneller und auch richtig hätte berechnen können. Unter den log. Tabellen zeichnen sich neben Vega aus die von Neper, Brigg, Blacq, Shervin, Schulz, Callet.

II. Abschnitt.

Von den Dreiecken.

§. 154.

Lehrsatz (Fig. 108.):

In jedem Dreiecke ABC verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, d. h., (wenn man die den Winkeln entgegenstehenden Seiten mit den nämlichen, bloß kleinen Buchstaben der Winkel bezeichnet,)

$$a : b = \sin. A : \sin. B.$$

Beweis:

Nach beschriebenem Kreise ist beim Radius r

$\frac{1}{2} BC = \sin. A$ }
$\frac{1}{2} AC = \sin. B$ } §. 145. Eben so, wenn BC weiter herab fällt,

$\frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} AC = \sin. A : \sin. B$,
$\frac{1}{2} a : \frac{1}{2} b = \sin. A : \sin. B$, und
$a : b = \sin. A : \sin. B$.

I. Zusatz: Auch im rechtwinkligen $\triangle$ CHA (Fig. 109.) verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der opponierten Winkel, also:

a) $CH : CA = \sin. A : \sin. H$, oder:
$a : h = \sin. A : \sin. H$ $(\sin. H = \sin. 90^\circ = r)$, u.
$a : h = \sin. A : r$.

b) $HC : HA = \sin. A : \sin. C$, oder
$a : c = \sin. A : \sin. C$.

Weil C zu A Complement ist (§. 52., Zus. II.), so ist $\sin. C = \text{cosin}. A$ (§. 140., Zus.), und $a : c = \sin. A : \text{cosin}. A$.

c) $CA : AH = \sin. H$ (oder r) $: \sin. C$ (oder $\cos. A$),
$h : c = r : \text{cosin}. A$.

II. Zusatz: Wenn man (Fig. 110.) im gleichschenkligen $\triangle$ BAC von der Spitze A auf die Grundlinie BC einen Perpendikel AL zieht, so verhält sich im rechtwinkligen $\triangle$ ACB, $c : \frac{1}{2} a = \sin. ALB$ (oder r) : $\sin. \frac{1}{2} A$, d. i. $c : \frac{1}{2} a = r : \sin. \frac{1}{2} A$.

§. 155.

Lehrsatz (Fig. 111.):

In jedem Dreiecke ACB verhält sich die Summe zweier Seiten zur Differenz derselben, wie die Tangens der halben Summe der opponierten Winkel zur Tangens der halben Differenz eben dieser Winkel, d. h.

$$c + b : c - b = tg. \frac{C + B}{2} : tg. \frac{C - B}{2}.$$

Beweis:

Wenn man beim Radius r am Puncte A mit $AC = AD = AE$ einen Kreis gemacht, und die Sehnen DC, CE gezogen hat, so ziehe man an B die Linie FB parallel mit CE, verlängere DC bis F, und ziehe mit BF aus B einen Kreisbogen. Nun ist DF die Tangens von $s + p$, und CF die Tangens von p. Ferner ist $m = o + r + s$ (§. 53.), auch ist $m = o + n = 2n$ (da $o = n$); dann ist $n = s + p$ (§. 45., b.). Folglich ist $o + r + s = 2n$, und $n = s + p = \frac{o + r + s}{2}$. Wiederum ist, da $\frac{o + r + s}{2} = s + p$, $p = \frac{o + r + s}{2} - s = \frac{o + r + s - 2s}{2} = \frac{o + r - s}{2}$. In der Figur

ist $\frac{o + r + s}{2} = \frac{C + B}{2}$, und $\frac{o + r - s}{2} = \frac{C - B}{2}$.

Es verhält sich (§. 75., Zus.)

$$DB : EB = DF : CF, \text{ d. h.}$$

$$c + b : c - b = \text{tg. } s + p : \text{tg. } p, \text{ oder:}$$

$$c + b : c - b = \text{tg. } \frac{C + B}{2} : \text{tg. } \frac{C - B}{2}.$$

§. 156.

Lehrsatz (Fig. 112.):

In jedem Dreiecke ACB verhält sich die größte Seite zur Summe der beiden andern, wie die Differenz eben derselben zum Stücke der größten Seite außerhalb der Peripherie, welches ein mit der kleinsten Seite aus dem größten Winkel gezogener Kreis bestimmt, d. i.

$$c : a + b = b - a : AD \text{ oder } x.$$

Beweis:

$AE : AD = AB : AF$ (§. 90.), d. i.
$AC - CE$ (oder $CA - CB$) $: x = c : AC + CF$ (oder $CA + CB$);
$b - a : x = c : b + a$, oder:
$c : a + b = b - a : x$.

I. Zusatz: $x = \frac{(a + b)(b - a)}{c} = \frac{b^2 - a^2}{c}$.

II. Zusatz: Wenn man aus C auf c den Perpendikel CG zieht, so theilt dieser c in zwei Theile, wovon $AG = \frac{1}{2}(c + x)$ und $BG = \frac{1}{2}(c - x)$; denn $BD = c - x$, $BG = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2}(c - x)$;

ferner ist $AG = x + \frac{1}{2} DB = x + \frac{1}{2}(c - x)$
$= x + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} c = \frac{1}{2}(c + x)$.

III. Zusatz: a) $BC : BG = r : \text{cosin. } B$ (§. 154., Zus. I. c.);

$$a : \tfrac{1}{2}(c - x) = r : \text{cosin. } B.$$

$$\cos. B = \frac{\frac{1}{2} r (c - x)}{a} = \frac{r}{a} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(c - \frac{b^2 - a^2}{c}\right) \text{(Zus. I.)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r}{a} \left(\frac{c^2}{c} - \frac{b^2 - a^2}{c}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r}{a} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c}\right) = \frac{r}{2ac}(c^2 + a^2 - b^2).$$

b) $AC : AG = r : \text{cosin. } A$;
$b : \frac{1}{2}(c + x) = r : \text{cosin. } A$;

$$\text{cosin. } A = \frac{\frac{1}{2} r (c + x)}{b}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r}{b} \left(c + \frac{b^2 - a^2}{c}\right)$$

$$= \frac{r}{2b} \left(\frac{c^2}{c} + \frac{b^2 - a^2}{c}\right)$$

$$= \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2).$$

§. 157.

Die §§. 154. bis 156. incl. geben die Regeln an die Hand, um die Dreiecke zu berechnen, und zwar:

Erster Fall.

Aus einer Seite und den 2 anliegenden Winkeln die übrigen Stücke des Dreieckes, nämlich die 2 Seiten und den dritten Winkel zu finden.

Es sei (Fig. 108.) gegeben AC = b nebst A, C. Man finde

I. B; B = 180° — (A + C) (§. 52., Zus. IV.),

II. c; b : c = sin. B : sin. C (§. 154.),

$$c = \frac{b \cdot \sin. C}{\sin. B}.$$

III. a; b : a = sin. B : sin. A (§. 154.),

$$a = \frac{b \cdot \sin. A}{\sin. B}.$$

Anmerkung: Ist im rechtwinkligen △ HAC (Fig. 109.) aus h, A, C zu finden H, a, c; so ist

I. H = 90°,

II. c : h = cosin. A : r (§. 154., Zus. I. c.),

$$c = \frac{h \cdot \text{cosin}. A}{r}.$$

III. a : h = sin. A : r (§. 154., Zus. I., a.),

$$a = \frac{h \cdot \sin. A}{r}.$$

Zweiter Fall.

Aus 2 Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite und 2 Winkel zu finden.

Es sei (Fig. 111.) gegeben b, c, *A*; man finde

I. und II. B, *C*; 180° — *A* = B + *C* (§. 52., Zus. IV.);

$$\frac{180° - A}{2} = \frac{C + B}{2}.$$

Es verhält sich $c + b : c - b = tg. \frac{C + B}{2} : tg. \frac{C - B}{2}$ (§. 155.)

$$tg. \frac{C - B}{2} = \frac{c - b \,.\, tg. \frac{C + B}{2}}{c + b};$$

$$\tfrac{1}{2} (B + C) + \tfrac{1}{2} (C - B) = C;$$
$$\tfrac{1}{2} (B + C) - \tfrac{1}{2} (C - B) = B;$$

III. a; $a : c = sin. A : sin. C$ (§. 154.)

$$a = \frac{c \,.\, sin. A}{sin. C}.$$

Beispiel:

Es sei $A = 136^0$ ($sin. A = sin. 180^0 - 136^0 = sin. 44^0$, §. 142.), $c = 336'$, $b = 224'$;

$$180^0 - 136^0 = 44^0 = C + B;$$

$$\frac{180^0 - 136^0}{2} = \frac{44^0}{2} = 22^0 = \frac{C + B}{2};$$

$$560^0 : 112^0 = tg. 22^0 : tg. \frac{C - B}{2};$$

$$tg. \frac{C - B}{2} = \frac{112' \,.\, tg. 22^0}{560'};$$

$$\begin{aligned} l.\ 112 &= 2{,}0492180 \\ l.\ tg. 22^0 &= 9{,}6064096 \\ \hline &\ 11{,}6556276 \\ -\,l.\ 560 &= -\ 2{,}7481880 \\ \hline l.\ tg. \frac{C - B}{2} &= 8{,}9074396; \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{C - B}{2} = + 4^\circ\ 37';$$

$$\tfrac{1}{2}(C + B) = \frac{C + B}{2} = 22^\circ,\ 00'$$
$$+$$
$$C = 26^\circ\ 37'$$

$$\tfrac{1}{2}(C + B) = + 22^\circ,\ 00'$$
$$\tfrac{1}{2}(C - B) = \quad 4^\circ\ 37'$$
$$-$$
$$B = 17^\circ\ 23';$$

$$a : 336 = \sin.\ 44^\circ\ (\sin.\ A) : \sin.\ 26^\circ\ 37';$$

$$a = \frac{336\ .\ \sin.\ 44^\circ}{\sin.\ 26^\circ\ 37'};$$

$$
\begin{aligned}
\text{l. } 336 &= 2{,}5263393 \\
\text{l. sin. } 44^\circ &= 9{,}8417713 \\
&\ 12{,}3681106 \\
\text{compl. d. l. sin. } 26^\circ\ 37' &= 0{,}3487034 - 10 \\
\text{l. } a &= 2{,}7168140 \\
a &= 520{,}98' = 521' \text{ beinahe.}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: 1) Soll man (Fig. 109.) für das rechtwinklige △ HAC aus a, H, c die Stücke h, A, C finden, so setze man $h = \sqrt{c^2 + a^2}$. Dann: c : h = cosin. A : r; cosin. $A = \frac{cr}{h}$, und a : h = sin. A : r, wo sin. A = cosin. $C = \frac{ar}{h}$.

2) Aus 2 ungleichen Seiten und einem entgegenstehenden Winkel, welcher aber der größern Seite opponiert ist (§. 33.), kann man so die übrigen Stücke berechnen:

Es sei (Fig. 113.) c, C, a gegeben, man soll b, B, A finden.

c : a

$$c : a = \sin. C : \sin. A;$$

$$\sin. A = \frac{a \,.\, \sin. C}{c};$$

$$B = 180^\circ - (A + C);$$

$$c : b = \sin. C : \sin. B$$

$$b = \frac{c \,.\, \sin. B}{\sin. C}.$$

Dritter Fall.

Aus den drei Seiten die drei Winkel des Dreieckes zu finden.

Es sei (Fig. 112.) gegeben a, b, c; zu finden A, B, C.

$\text{cosin.} A = \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)$, (§. 156. Zus. III.) und

$\text{cosin.} B = \frac{r}{2ac}(c^2 + a^2 - b^2)$, mithin ist

$C = 180^\circ - (A + B)$.

§. 158.

Bringt man diese drei Fälle in einer Tafel vor, so sieht dieselbe zu bequemer Benützung in vorliegenden Aufgaben aus, wie folgt:

Tafel zur Berechnung der recht=

A. Rechtwinklige Dreiecke.		
gegeben.	gefunden.	§.
I. h, A (Fig. 109.)	1) $C = 180^\circ - (H + A)$.	52. Zus. IV.
	2) $a = \frac{h \cdot \sin. A}{r}$.	157. Erster Fall, Anm.
	3) $c = \frac{h \cdot \text{cosin}. A}{r}$.	— —
II. a, c (Fig. 109.)	1) $h = \sqrt{a^2 + c^2}$.	84. Zus. II.
	2) $\text{cosin}. A = \frac{cr}{h}$.	157. Zweiter Fall, Anm. 1)
	3) $\text{cosin}. C = \sin. A$ $= \frac{ar}{h}$.	— —
III. a, c, h (Fig. 109.)	1) $H = 90^\circ$.	
	2) $\text{cosin}. A = \frac{cr}{h}$.	154. Zus. I. c.
	3) $C = 180^\circ - (H + A)$.	52. Zus. IV.

und schiefwinkligen Dreiecke.

B. Schiefwinklige Dreiecke.		
gegeben.	gefunden.	§.
I. b, A, C (Fig. 108.)	1) $B = 180^\circ - (A + C)$.	52. Zus. IV.
	2) $a = \frac{b \cdot \sin. A}{\sin. B}$.	157. Erster Fall.
	3) $c = \frac{b \cdot \sin. C}{\sin. B}$.	— —
II. b, c, A (Fig. 111.)	1) und 2) $\frac{180^\circ - A}{2} = \frac{B + C}{2}$;	52. Zus. IV.
	$\text{tg.} \frac{C - B}{2} = \frac{c - b \cdot \text{tg.} \frac{C + B}{2}}{c + b}$; $\frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(C - B) = C$; $\frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(C - B) = B$.	
	3) $a = \frac{c \cdot \sin. A}{\sin. C}$.	157. 2r Fall, Sieh auch Anm. 2)
III. a, b, c (Fig. 112.)	1) $\text{cosin.} A = \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)$.	157. 3r Fall.
	2) $\text{cosin.} B = \frac{r}{2ac}(c^2 + a^2 - b^2)$.	
	3) $C = 180^\circ - (A + B)$.	52. Zus. IV.

Anmerkung: Für die geradlinigen Dreiecke werden unten mehrere Formeln angeführt, als diese Grundformeln. Man kann hier noch vorbringen, daß, wenn man im rechtwinkligen Dreiecke AHC (Fig. 114.) mit a = r aus C einen Kreisbogen beschreibt, c die tg. C oder die cotg. A wird, und sich dann folgendes Verhältniß ergibt: a : c = r : tg. C = r : cotg. A.

III. Abschnitt.

Von der praktischen Trigonometrie.

Anmerkung: Die in §. 125. angeführten Instrumente kommen auch hier mehr oder weniger vor, und die Erklärung ihrer Einrichtung und Anwendung ist hier mündlich zu wiederholen.

§. 159.

Aufgabe (Fig. 115.): Zu finden, wie viele Grad der Winkel ACB oder C auf dem Papiere hält.

Auflösung:

Aus C beschreibe man mit CA = b = r = 1 (1 Fuß, 1 Zoll ꝛc.), nachdem man diese Länge von r auf dem verjüngten Maßstabe genommen hat, einen Kreisbogen, und lasse den Perpendikel AB = c auf CB fallen, welches dann der Sinus des Winkels C sein wird. Auf demselben Maßstabe messe man c, und bestimme in Vegas Tabellen für den Logarithmus des Sinus c den entsprechenden Bogen oder Winkel C aus den ersten Decimalen der Mantisse. Dann beobachte man die Vorschrift des §. 152. Zus.

Anmerkung: Hierdurch kann man den Transporteur an Genauigkeit übertreffen.

§. 160.

Aufgabe: Einen auf dem Papier verzeichneten Winkel an einen Punct einer gegebenen geraden Linie zu tragen.

Auflösung:

In Vega bestimme man des Winkels Log. sin. und Log. cosin., wie auch die entsprechenden Längen (bei diesen Logarithmen). Mit r = 1, auf dem Maßstabe genommen, mache man aus dem Puncte der gegebenen Linie einen Kreis, und trage von demselben Puncte die auf demselben Maßstabe genommene Länge des Cosinus in der Linie auf, an deren Länge Endspuncte man die Größe des auf demselben Maßstabe genommenen Sinus als Perpendikel auftrage. Nun ziehe man vom obern Endspuncte dieses Perpendikels nach dem gegebenen Puncte der geraden Linie eine dritte Linie, wodurch endlich der Winkel aufgetragen wird. Dabei beobachte man wieder den §. 152. Zus.

Anmerkung: Mündlich wird von dem geradlinigen Transporteur gehandelt. Sieh Fig. 121.

§. 161.

Aufgabe (Fig. 98, 99.): Eine Weite AB zu messen, wenn man von C nach A, B sehen und gehen, oder nach A, B sehen, aber nur nach A gehen kann.

Auflösung:

Man messe AC = b, und bestimme die Winkel C, A; es ist $B = 180^\circ - (C + A)$. Nun wird AB

$$= c = \frac{b \,.\, \sin.\, C}{\sin.\, B}$$ (§. 158. B, I., 3.)

§. 162.

Aufgabe (Fig. 100): Eine Weite AB zu messen, da man aus C nach A, B nur sehen, nicht gehen kann.

Auflösung:

Man messe CD, und die Winkel ACD, CDB, BCD, ADC; $CAD = 180^\circ - (ACD + ADC)$;
und $CBD = 180^\circ - (CDB + BCD)$;
endlich $ADB = CDB - ADC$;
dann $CD : AD = \sin.\, CAD : \sin.\, ACD$ (§. 154.);

$$\underline{AD} = \frac{CD \,.\, \sin.\, ACD}{\sin.\, CAD};$$

$$CD : BD = \sin.\, CBD : \sin.\, BCD$$

$$\underline{BD} = \frac{CD \,.\, \sin.\, BCD}{\sin.\, CBD};$$

$$AD + BD : AD - BD = tg.\, \tfrac{1}{2}\,(DAB + DBA) : tg.\, \tfrac{1}{2}\,(DBA - DAB)$$ (§. 155.); und,

da $\tfrac{1}{2}(DAB + DBA) = \frac{180^\circ - ADB}{2}$,

$$tg.\, \tfrac{1}{2}(DBA - DAB) = \frac{AD - BD \times tg.\, \tfrac{1}{2}(DAB + DBA)}{AD + BD};$$

$$\tfrac{1}{2}\,(DAB + DBA) + \tfrac{1}{2}\,(DBA - DAB) = DBA,$$
$$\tfrac{1}{2}\,(DAB + DBA) - \tfrac{1}{2}\,(DBA - DAB) = DAB;$$

$AD : AB = \sin.\, DBA : \sin.\, ADB$, oder:

$BD : AB = \sin.\, DAB : \sin.\, ADB$, folglich:

$$\underline{\underline{AB}} = \frac{AD \,.\, \sin.\, ADB}{\sin.\, DBA} = \frac{BD \,.\, \sin.\, ADB}{\sin.\, DAB}.$$

§. 163.

Aufgabe (Fig. 116.): Eine Höhe AH zu messen, die man aus C sehen und erreichen kann.

Auflösung:

Man messe den Winkel C; nun ist, weil $H = 90^\circ$, $A = 180^\circ - (H + C)$; ferner messe man CH; nun verhält sich:

$CH : AH = \sin.\, A : \text{cosin.}\, A$,
$a \;:\; c \;= \sin.\, A : \text{cosin.}\, A$ (§. 154. Zus. I. b.);

$$c = \frac{a \,.\, \text{cosin.}\, A}{\sin.\, A}.$$

§. 164.

Aufgabe (Fig. 117.): Eine Höhe AH zu messen, die man aus D oder C sehen, aber nicht erreichen kann.

Auflösung:

Man messe CD; dann den Winkel HCA; jetzt ist ACD = 180° — HCA; eben so messe man den Winkel *D*; es verhält sich:

$$CD : AC = \sin. CAD\ (\text{oder } 180° - (ACD + D)) : \sin. D;$$

$$AC \text{ oder } h = \frac{CD \cdot \sin. D}{\sin. CAD};$$

$$h : AH = r : \text{cosin}. A\ (\text{oder cosin}. (180° - (C + H));$$

$$AH = \frac{h \cdot \text{cosin}. A}{r}\ (§. 158. A. I. 3.).$$

Zusatz: AH oder c : HC oder a = cosin. *A* : sin. *A*;

$$a = \frac{c \cdot \sin. A}{\text{cosin}. A}\ (§. 154. \text{Zus. I. b.}).$$

§. 165.

Aufgabe (Fig. 118.): Aus den gegebenen 3 Seiten eines Dreieckes dessen Flächeninhalt zu finden.

Auflösung:

Es ist △ ABC = AC . ½ *BD* (§. 96.); es verhält sich c : *BD* = r : sin. *A* (§. 154. Zus. I. a.);

$$BD = \frac{c \cdot \sin. A}{r};\ \text{also}$$

$$\triangle ABC = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot \sin. A}{r} = \frac{bc}{2r} \cdot \sin. A;$$

$$\sin. A^2 = r^2 - \text{cosin}. A^2\ (§. 146.);$$

$$\sin. A^2 = (r + \text{cosin}. A) \cdot (r - \text{cosin}. A);$$

$$r + \text{cosin}. A = r + \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)\ (§. 156. \text{Zus. III. b.}).$$

$$= \frac{r \cdot 2bc}{2bc} + \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}(2bc + c^2 + b^2 - a^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}((c + b)^2 - a^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}((c + b + a)(c + b - a));$$

$$r - \text{cosin.}\,A = r - \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$= \frac{r.2bc}{2bc} - \frac{r}{2bc}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}(2bc - c^2 - b^2 + a^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}(a^2 - (-2bc + c^2 + b^2))$$

$$= \frac{r}{2bc}(a^2 - (b - c)^2)$$

$$= \frac{r}{2bc}((a - b + c)(a + b - c));$$ also

$$\text{sin.}\,A^2 = \frac{r^2}{4b^2c^2}((a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)),$$ und

$$\text{sin.}\,A = \frac{r}{2bc}\surd((a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c));$$ folglich

$$\triangle\,ABC = \frac{bc}{2r}\cdot\frac{r}{2bc}\surd((a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c))$$

$$= \tfrac{1}{4}\surd((a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)).$$

Wenn $a = 48'$, $b = 50'$, $c = 60'$, so wird der Flächeninhalt $= \tfrac{1}{4}\surd((48 + 50 + 60)(50 + 60 - 48)(48 + 60 - 50)(48 + 50 - 60));$

48	50	48	48
50	60	60	50
60	110	108	98
158	− 48	50	60
	62	58	38

158	9796	568168
62	58	38
316	78368	4545344
948	48980	1704504
9796	568168	21590384

$$\frac{1}{4}\sqrt{21|59|03|84} = \frac{4646,55}{4} = 1161,64\ \square'.$$

16
559
86
516
4303
924
3696
60784
9286
55716
506800
92925
464625
4217500
92930

§. 166.

Aufgabe (Fig. 119.): Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel für $r = 1$ des Dreieckes Flächeninhalt zu finden.

Auflösung:

$BC : BD = 1 : \sin. C$ (§. 154. Zus. I. a.),

$a : p = 1 : \sin. C$;

$p = a . \sin. C$, und, da $\triangle = \frac{1}{2}\, p\, b$, so ist

$$\triangle = \frac{ab \sin. C}{2} = \frac{BC \times AC . \sin. C}{2}.$$

§. 167.

Aufgabe (Fig. 113.): Aus zwei Seiten und dem der größern Seite opponierten Winkel (§. 33.) den Flächeninhalt des Dreieckes zu finden.

Auflösung:

Weil a, C und c schon gegeben sind, so suche man nach (§. 157. 2ter Fall, Anmerk. 2) sin. $A = \frac{a \cdot \sin. C}{c}$, $B = 180^\circ - (A + C)$, und $b = \frac{c \cdot \sin. B}{\sin. C}$. Aus a, b, c suche man nach §. 165. den Inhalt des Dreiecks.

§. 168.

Aufgabe (Fig. 119.): Aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln den Inhalt des Dreieckes zu finden.

Auflösung:

$a : p = 1 : \sin. C$ (§. 154. Zus. I. a.),

$p = a \cdot \sin. C$;

$b : a = \sin. B : \sin. A$ (§. 154.)

$= \sin. B : \sin. (B + C)$ (§. 142.),

$b = \frac{a \cdot \sin. B}{\sin. (B + C)}$; da $\triangle = \frac{1}{2}bp$ ist,

so ist $\triangle = \frac{a^2 \cdot \sin. C \cdot \sin. B}{2 \sin. (B + C)}$.

Anmerkung: Da $\sin. (B + C) = \sin. A$, so nehme man $\sin. A = 180^\circ - (C + B)$.

§. 169.

Aufgabe (Fig. 119.): Aus einer Seite und zwei Winkeln, wovon einer der Seite gegenüber steht, den Flächeninhalt eines Dreieckes anzugeben.

I. Auflösung:

Man ziehe die Summe des einen der Seite anliegenden und des andern ihr opponierten Winkels von 180° ab, um den dritten der Seite anliegenden Winkel zu erhalten. Aus der Seite nun und aus diesem letzten Winkel sammt dem andern ihr anliegenden berechne man des $\triangle$es Inhalt nach §. 168.

II. Auflösung:

$$a : p = 1 : \sin. C,$$
$$p = a . \sin. C;$$
$$b : a = \sin. B : \sin. A$$
$$= \sin. (A + C) : \sin. A;$$
$$b = \frac{a . \sin. (A + C)}{\sin. A};$$
$$\triangle = \frac{bp}{2} = \frac{a^2 \sin. (A + C) . \sin. C}{2 \sin. A}.$$

Anmerkung: 1) Da $\sin. (A + C) = \sin. B$, so nehme man $\sin. B = 180^\circ - (A + C)$.

2) Die Auflösung der Aufgaben von §. 165 bis 169. incl. dient zur Berechnung des Flächeninhaltes von Vielecken; z. B. (Fig. 102.) wenn der Flächeninhalt vom Fünfecke ABCDEA zu finden wäre, so messe man, nachdem man dasselbe durch Diagonallinien in Dreiecke getheilt hat, AB, B, BAC, und suche nach §. 168. den Inhalt des △es ACB; dann messe man CD, ACD, ADC und suche nach demselben §. den Flächeninhalt des Dreieckes ADC; endlich messe man AE, ED und E, um nach §. 166. das △ ADE dem Inhalte nach zu finden. Zuletzt wird Polyg. ABCDEA = △ ACB + △ ADC + △ ADE.

§. 170.

Aufgabe: Aus des △es Inhalte, einem Winkel und einer anliegenden Seite die andere anliegende Seite zu finden.

Auflösung:

$$\triangle = \frac{ab . \sin. C}{2} \ (\text{§. } 166.), \qquad 2\triangle = ab . \sin C;$$
$$\frac{2\triangle}{b . \sin. C} = a; \qquad \frac{2\triangle}{a . \sin. C} = b.$$

§. 171.

Aufgabe; Aus den 2 Seiten und dem Flächeninhalte des △es den eingeschlossenen Winkel zu finden.

Auflösung:

$$\triangle = \frac{ab \sin. C}{2}; \quad \frac{2\triangle}{ab} = \sin. C.$$

§. 172.

Aufgabe: Aus dem Inhalte des Dreieckes nebst den einer Seite anliegenden Winkeln die Seite zu finden.

Auflösung:

$$\triangle = \frac{a^2 \sin. C . \sin. B}{2 \sin. (B + C)} \text{ (§. 168.)};$$

$$2\triangle \sin. (B + C) = a^2 \sin. C . \sin. B;$$

$$\sqrt{\frac{2\triangle \sin. (B + C)}{\sin. C . \sin. B}} = a.$$ Sieh §. 168. Anmerk.

§. 173.

Aufgabe (Fig. 120.): Man soll vom Vierecke ADEF, dessen Winkel $A = 79^\circ\ 58'\ 27''$ gegeben ist, ein Dreieck wegschneiden, dessen Inhalt 10109,23 □' beträgt, welches seine Spitze in A hat, und dessen Grundlinie die Seite AF in C so schneidet, daß $AC = b = 116'$ hält.

Auflösung:

$$\triangle = 10109{,}23, \quad A = 79^\circ\ 58'\ 27'', \quad b = 116;$$

$$\triangle = \frac{cb . \sin. A}{2} \text{ (§. 166.)};$$

$$c = \frac{2\triangle}{b . \sin. A} \text{ (§. 170.)};$$

l. 2	= 0,3010300
l. △	= 4,0047181
c.d.l. b	= 7,9355420 — 10
c.d.l. sin. *A*	= 0,0066832
	2,2479733 = l. 177; c = 177'.

Nun ziehe man von *B* der Linie *AB* nach C der Linie AC die Linie BC; dann hat man das ververlangte △ ACB.

Zu Grisers Geom et Trigonom

II. Tab.

Zu Griesers Geom. et Trigonom.

Zu Gresers Geom. et Trigonom.

IV. Tab.

Zu Grasers Geom. et Trigonom.

Zu Griesers Geom. et Trigon.